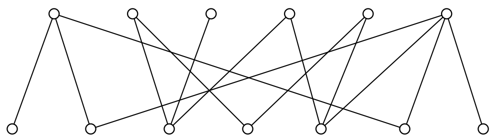
## 3. Párosítások páros gráfokban

**Kőnig–Hall / Kőnig–Frobenius-tétel.** $G$ egy páros gráf $A, F$ színosztályokkal.

a) $G$-ben akkor és csak akkor van $A$-t lefedő (azaz $A$ minden pontját párosító) párosítás, ha minden $X \subseteq A$-ra $|N(X)| \geq |X|$ teljesül.

b) $G$-ben akkor és csak akkor van teljes párosítás, ha $|A| = |F|$, és minden $X \subseteq A$-ra $|N(X)| \geq |X|$ teljesül.

**1.** Határozzuk meg az alábbi gráf $\nu$ és $\tau$ paramétereinek értékét.



**2.** A 8×8-as sakktáblán minél több kisnégyzet-átlót szeretnénk behúzni úgy, hogy semelyik kettőnek ne legyen közös pontja (közös végpont se). Legfeljebb hány átló húzható be?

**3.** $G$ egy egyszerű páros gráf $A$ és $F$ egyenlő méretű színosztályokkal. Bizonyítsuk be, hogy ha $G$-ben nincs izolált pont és $A$-ban minden pont fokszáma különböző, akkor $G$-ben van teljes párosítás.

**4.** Egy expedíció útra készül. Csomagolás közben észreveszik a következőket: $n$ dobozuk van, és $n$ tárgyat kell még elrakniuk. Minden tárgy maximum egy dobozba nem fér be. Minden dobozba minimum egy tárgy még belefér. Igazoljuk, hogy a csomagolás befejezhető az eddig elcsomagoltak átrendezése nélkül. [*Ki miben tudós?* 1984.]

**5.** Igazoljuk, hogy egy $d$-reguláris páros gráfban létezik teljes párosítás (ha $d \geq 1$).

**6.** Egy osztályban klubok működnek. Minden klubnak 4 tagja van, és minden tanuló pontosan 3 klubnak tagja. Igazoljuk, hogy lehetséges úgy klubvezetőket választani, hogy senki se legyen több klubnak is vezetője. (A klubvezető mindig a klubtagok közül kerül ki.)

**7.** Egy $n \times n$-es táblázat első néhány sora ki van töltve az $1, \ldots, n$ számokkal oly módon, hogy semelyik sorban és semelyik oszlopban nem fordul elő két azonos szám. Igazoljuk, hogy a hiányzó mezőket ki lehet tölteni úgy (az $1, \ldots, n$ számokkal), hogy ez a tulajdonság fennálljon az egész táblázatra.

**8.** Legyen $n \geq 2k+1$, és jelölje $\binom{[n]}{k}$ az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz $k$-elemű részhalmazainak halmazát. Mutassuk meg, hogy létezik olyan $\phi$: $\binom{[n]}{k} \to \binom{[n]}{k+1}$ *injektív* leképezés, amelyre $\phi(H) \supset H$ teljesül minden $H \in \binom{[n]}{k}$ esetén.

**9.** $G$ egy egyszerű páros gráf $A$ és $F$ színosztályokkal, ahol $|A| = |F| = m$. A gráfban minden csúcs foka legalább $m/2$. Igazoljuk, hogy $G$-ben létezik teljes párosítás.

**10.** Egy szigeten $n$ család lakik. A Vadászati Minisztérium a szigetet $n$ egyenlő területű vadászati területre osztotta. Ettől függetlenül a Földművelési Minisztérium a szigeten $n$ darab egyenlő területű földművelési területet jelölt ki. Igazoljuk, hogy a Kiutalási Minisztérium szét tudja úgy osztani e területeket a családok között, hogy minden család olyan vadászati és földművelési területet kapjon, amelyeknek van közös része.

**11.** Egy $n \times n$ méretű, nemnegatív elemeket tartalmazó mátrix minden sorában és minden oszlopában az elemek összege 1. Bizonyítsuk be, hogy ki tudunk jelölni a mátrixban $n$ pozíciót úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban pontosan egy kijelölt pozíció legyen, és a kijelölt pozíciók mindegyikében nem nulla (pozitív) elem álljon. [7.19]

*Megjegyzés:* A feladat annak igazolását kéri, hogy egy duplán sztochasztikus négyzetes mátrix permanense pozitív.

**12.**$^+$ Tegyük fel, hogy az $A, F$ színosztályú, egyszerű $G$ páros gráfban minden $A$-beli pont páratlan fokú. Továbbá teljesül, hogy bármely két $A$-beli pontnak páros sok közös szomszédja van. Mutassuk meg, hogy van $A$-t lefedő párosítás $G$-ben.

**13.**$^+$ Igazoljuk, hogy egy $2k$-reguláris gráf élei $k$ színnel színezhetők úgy, hogy az egyszínű élek 2-reguláris feszítő részgráfot alkossanak minden színre. [7.40]

**14.**$^+$ A bűvész és segédje egy trükköt mutatnak be. A bűvész húz 5 lapot a nézők által összekevert 52 lapos franciakártya-pakliból, megnézi őket, majd négyet közülük valamilyen sorrendben egyesével felfed. A segéd a látottak alapján kitalálja, hogy mi az ötödik lap.

a) Mutassuk meg, hogy *létezik* olyan stratégia, amellyel ez a bűvésztrükk megvalósítható. (A stratégiát a bűvész és a segéd természetesen előre megbeszélik.)

b) Adjunk meg egy konkrét stratégiát.