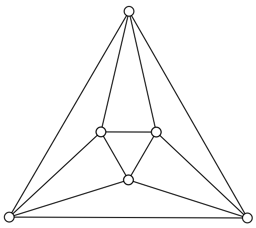
6. Élszínezések

Vizing-tétel: Ha G *egyszerű* gráf, akkor $\chi_e(G) \leq \Delta(G) + 1$. (Tehát egyszerű gráfok esetén $\chi_e(G) = \Delta(G)$ vagy $\chi_e(G) = \Delta(G) + 1$.)

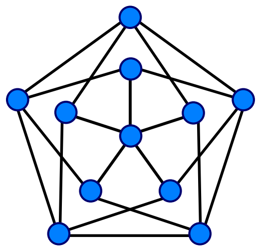
Kőnig-tétel: Ha G *páros* gráf, akkor $\chi_e(G) = \Delta(G)$.

1. Határozzuk meg az alábbi gráfok élkromatikus számát.

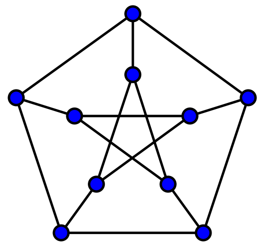
a)



b)



c)



d) Q_n, az n-dimenziós kockagráf. (A Q_n egyszerű gráf csúcsai az n hosszú 0-1 (bit)sorozatok ($n \geq 1$), és két csúcs pontosan akkor összekötött, ha mint bitsorozatok pontosan egy bitben térnek el.)

e) C_9-ből a körön másodszomszédos csúcsok összekötésével nyert gráf.

f) K_n teljes gráf.

2. a) Mutassuk meg, hogy minden 3-reguláris, Hamilton-kört tartalmazó gráf élkromatikus száma 3.
b) Van-e Hamilton-kör a Petersen-gráfban?
c) G egy hurokélmentes 3-reguláris gráf, melynek élkromatikus száma 3, és G élei a színek permutálásától eltekintve egyféleképpen színezhetők jól 3 színnel. Igazoljuk, hogy G-ben van Hamilton-kör.

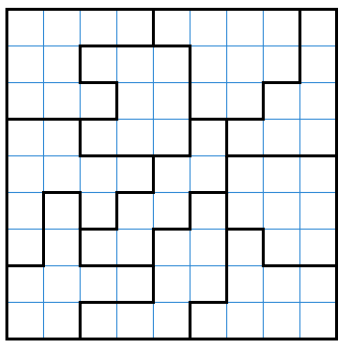
3. Legyen G egy egyszerű gráf. Jelölje $G \times 2$ azt a gráfot, amelyet úgy kapunk, hogy vesszük G két csúcsdiszjunkt példányát, továbbá minden csúcsot összekötünk a másik példánybeli „klónjával” (összesen $|V(G)|$ új élt behúzva). Igazoljuk, hogy $G \times 2$ élkromatikus száma $\Delta(G) + 1$.

4. G egy összefüggő, 3-reguláris egyszerű gráf, amelyben van olyan él, amelyet elhagyva a kapott gráf már nem lesz összefüggő. Igazoljuk, hogy $\chi_e(G) = 4$.

5. a) Igazoljuk, hogy egy d-reguláris páros gráf élkromatikus száma d.
b) Igazoljuk, hogy ha G **páros gráf**, akkor $\chi_e(G) = \Delta(G)$.

6. A G gráf jól élszínezhető k színnel. Bizonyítsuk be, hogy G-nek van olyan jó élszínezése, amelyben minden szín $\left\lfloor \frac{|E(G)|}{k} \right\rfloor$-szer vagy $\left\lceil \frac{|E(G)|}{k} \right\rceil$-szer fordul elő.

7.[+] A Bolyai Sudokuban a 9×9-es négyzet kisebb tartományokra van osztva úgy, hogy minden tartomány legfeljebb 9 mezőből áll. A tartományok tetszőleges alakúak lehetnek, egy példát mutat a lenti ábra. Igazoljuk, hogy a Bolyai Sudoku mezői kitölthetők 1-től 9-ig terjedő számokkal úgy, hogy semelyik sorban és semelyik tartományban ne legyen két egyforma szám. (Az oszlopokra nem követeljük meg ezt.)



8.$^+$ Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges hurokélmentes G gráfra $\chi_e(G) \le 3\left\lceil \frac{\Delta(G)}{2} \right\rceil$.
Segítség: Használjuk fel a III/12. feladatot. (Először vizsgáljunk $2k$-reguláris gráfokat.)
Megjegyzés: Ez a feladat már majdnem **Shannon tétele**, mely szerint $\chi_e(G) \le \left\lfloor \frac{3\Delta(G)}{2} \right\rfloor$.

9.$^+$ Igazoljuk, hogy K_{2n+1} élhalmaza előáll n darab Hamilton-kör élhalmazának (diszjunkt) uniójaként.