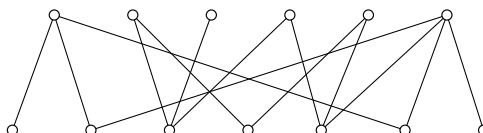


### 3. PÁROSÍTÁSOK PÁROS GRÁFOKBAN

**König–Hall / König–Frobenius-tétel.**  $G$  egy páros gráf  $A, F$  színosztályokkal.

- $G$ -ben akkor és csak akkor van  $A$ -t lefedő (azaz  $A$  minden pontját párosító) párosítás, ha minden  $X \subseteq A$ -ra  $|N(X)| \geq |X|$  teljesül.
- $G$ -ben akkor és csak akkor van teljes párosítás, ha  $|A| = |F|$ , és minden  $X \subseteq A$ -ra  $|N(X)| \geq |X|$  teljesül.

1.- Határozzuk meg az alábbi gráf  $\nu$  és  $\tau$  paramétereinek értékét.



2. A  $8 \times 8$ -as sakktáblán minél több kiségyzet-átlót szeretnénk behúzni úgy, hogy semelyik kettőnek ne legyen közös pontja (közös végpont se). Legfeljebb hány átló húzható be?

3.  $G$  egy egyszerű páros gráf  $A$  és  $F$  egyenlő méretű színosztályokkal. Bizonyítsuk be, hogy ha  $G$ -ben nincs izolált pont és  $A$ -ban minden pont fokszáma különböző, akkor  $G$ -ben van teljes párosítás.

4. Egy expedíció útra készül. Csomagolás közben észreveszik a következőket:  $n$  dobozuk van, és  $n$  tárgyat kell még elrakniuk. Minden tárgy maximum egy dobozba nem fér be. Minden dobozba minimum egy tárgy még befér. Igazoljuk, hogy a csomagolás befejezhető az eddig elcsomagoltak átrendezése nélkül. [Ki miben tudós? 1984.]

5. Igazoljuk, hogy egy  $d$ -reguláris páros gráfban létezik teljes párosítás (ha  $d \geq 1$ ).

6. Egy osztályban klubok működnek. Minden klubnak 4 tagja van, és minden tanuló pontosan 3 klubnak tagja. Igazoljuk, hogy lehetséges úgy klubvezetőket választani, hogy senki se legyen több klubnak is vezetője. (A klubvezető mindig a klubtagok közül kerül ki.)

7. Egy  $n \times n$ -es táblázat első néhány sora ki van töltve az  $1, \dots, n$  számokkal oly módon, hogy semelyik sorban és semelyik oszlopban nem fordul elő két azonos szám. Igazoljuk, hogy a hiányzó mezőket ki lehet tölteni úgy (az  $1, \dots, n$  számokkal), hogy ez a tulajdonság fennálljon az egész táblázatra.

8.  $G$  egy egyszerű páros gráf  $A$  és  $F$  színosztályokkal, ahol  $|A| = |F| = m$ . A gráfban minden csúcs foka legalább  $m/2$ . Igazoljuk, hogy  $G$ -ben létezik teljes párosítás.

9. Egy szigeten  $n$  család lakik. A Vadászati Minisztérium a szigetet  $n$  egyenlő területű vadászati területre osztotta. Ettől függetlenül a Földművelési Minisztérium a szigeten  $n$  darab egyenlő területű földművelési területet jelölt ki. Igazoljuk, hogy a Kiutalási Minisztérium szét tudja úgy osztani e területeket a családok között, hogy minden család olyan vadászati és földművelési területet kapjon, amelyeknek van közös része.

10. Egy  $n \times n$  méretű, nemnegatív elemeket tartalmazó mátrix minden sorában és minden oszlopában az elemek összege 1. Bizonyítsuk be, hogy ki tudunk jelölni a mátrixban  $n$  pozíciót úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban pontosan egy kijelölt pozíció legyen, és a kijelölt pozíciók mindegyikében nem nulla (pozitív) elem álljon. [7.19]

Megjegyzés: A feladat annak igazolását kéri, hogy egy duplán sztochasztikus négyzetes mátrix permanense pozitív.

11.+ Tegyük fel, hogy az  $A, F$  színosztályú, egyszerű  $G$  páros gráfban minden  $A$ -beli pont páratlan fokú. Továbbá teljesül, hogy bármely két  $A$ -beli pontnak páros sok közös szomszédja van. Mutassuk meg, hogy van  $A$ -t lefedő párosítás  $G$ -ben.

12.+ Igazoljuk, hogy egy  $2k$ -reguláris gráf élei  $k$  színnel színezhetők úgy, hogy az egyszínű élek  $2$ -reguláris feszítő részgráfot alkossanak minden színre. [7.40]

**13.**<sup>+</sup> A bűvész és segédje egy trükköt mutatnak be. A bűvész húz 5 lapot a nézők által összekevert 52 lapos franciakártya-pakliból, megnézi őket, majd négyet közülük valamilyen sorrendben egyesével felfed. A segéd a látottak alapján kitalálja, hogy mi az ötödik lap.

- a) Mutassuk meg, hogy *létezik* olyan stratégia, amellyel ez a bűvésztrükk megvalósítható.  
(A stratégiát a bűvész és a segéd természetesen előre megbeszélik.)
- b) Adjunk meg egy konkrét stratégiát.