

2. FÁK ÖSSZESZÁMLÁLÁSA

- 1.⁻ Hány feszítőfája van P_n -nek, illetve C_n -nek?
- 2.⁻ K_n feszítőfái között hány csillag, illetve hány út van (ha $n \geq 3$)?
- 3.⁻ Az n pontú teljes gráf minden élét lecseréljük két párhuzamos élre. Hány feszítőfája van az így kapott gráfnak?
4. Hány olyan feszítőfája van K_n -nek, amelyben a v kitüntetett csúcs levél (ha $n \geq 3$)?
5. Hány olyan fa van n ponton, amelynek pontosan $n - l$ levele van? [4.8]
6. Jelölje a G gráf feszítőfáinak számát $t(G)$, és legyen e egy tetszőleges él G -ben. Bizonyítsuk be, hogy

$$t(G) = t(G - e) + t(G/e),$$

ahol a $G - e$ gráfot az e él elhagyásával, a G/e gráfot pedig az e él összehúzásával kapjuk G -ből.

7. Mi az olyan fák száma a $\{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m\}$ pontokon, melyekben minden él egy v_i -t köt össze egy w_j -vel? [4.11]

8. Az n pontú teljes gráfból elhagyunk egy élt ($n \geq 3$). A kapott gráfnak hány feszítőfája van?

- 9.⁺ Legyen $n \geq 2$. Egy n pontú út minden pontját összekötjük egy új külső ponttal a következőképpen: az út belső pontjaiból egyszeres élek, az út két végpontjából kétszeres élek vezetnek az új ponthoz. Mutassuk meg, hogy az így kapott $n + 1$ pontú gráf feszítőfáinak száma az F_{2n+1} Fibonacci-szám ($F_0 = F_1 = 1, F_2 = 2, \dots$ indexeléssel).

- 10.⁺ Legyen $n \geq 2$. Egy n pontú út minden pontját összekötjük egy új külső ponttal. Mutassuk meg, hogy az így kapott $n + 1$ pontú egyszerű gráf feszítőfáinak száma az F_{2n-1} Fibonacci-szám ($F_0 = F_1 = 1, F_2 = 2, \dots$ indexeléssel).

- 11.⁺ Adott n darab különböző szín: c_1, \dots, c_n . Hányféleképpen lehet egy c_1 színű, egy c_2 színű, \dots , és egy c_n színű kört elhelyezni a síkon úgy, hogy a körvonalaknak (páronként) ne legyen közös pontja? Két lerakást pontosan akkor tekintünk egyformának, ha az egyik lerakás átdeformálható a másikba úgy, hogy a köröket egymástól függetlenül mozgathatjuk és nagyíthatjuk/kicsinyíthetjük, de végig megtartva azt a tulajdonságot, hogy a körök nem metszik egymást.

- 12.⁺ Bizonyítsuk be az alábbi Abel-azonosságot kombinatorikus úton:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} k^{k-1} (n-k)^{n-k-1} = 2(n-1)n^{n-2}.$$

13. Határozzuk meg az $n + 1$ levelű teljes bináris síkfák számát.

14. Határozzuk meg az n élű síkfák számát.