

## 7. SÍKGRÁFOK, METSZÉSI SZÁM

**Euler-formula:** Ha a  $G$  összefüggő (szépen lerajzolt) síkgráfnak  $c$  csúcsa,  $e$  éle, és  $t$  tartománya van, akkor  $c - e + t = 2$ .

**Kuratowski-tétel:** Egy gráf akkor és csak akkor síkgráf, ha nem tartalmazza sem a  $K_5$ -öt, sem  $K_{3,3}$ -at topologikus részgráfként.

**Wagner-tétel:** Egy gráf akkor és csak akkor síkgráf, ha nincs benne sem  $K_5$ -minor, sem  $K_{3,3}$ -minor.

1. Egy nemzetközi konferencián egy asztalnál öt különböző ország egy-egy képviselője ül. Bizonyítsuk be, hogy van köztük kettő, akiknek az országa nem szomszédos. (Az országok topológiai értelemben összefüggők.)

2. Mutassuk meg, hogy ha egy konvex poliéderben bármely két csúcs szomszédos, akkor a poliéder egy tetraéder.

3. Legyen  $G$  egy Hamilton-körrel rendelkező síkba rajzolt gráf. Bizonyítsuk be, hogy  $G$  tartományai 4 színnel jól színezhetők (a négyszíntétel felhasználása nélkül).

4. Mutassuk meg, hogy ha egy síkgráfban minden pont foka páros, akkor tartományai 2 színnel jól színezhetők (tetszőleges síkbarajzolás esetén). [5.26]

5. Egy országban kör alakú autópályákat építettek úgy, hogy semelyik két kör nem érinti egymást. Bizonyítsuk be, hogy az autópályák kereszteződéseinben létesíthetők kétszintű csomópontok úgy, hogy tetszőleges autópályán körbehaladva a felső illetve alsó szintek változnak. (Egy kereszteződésben pontosan két autópálya találkozik.)

6. Egy síkgráfban minden pont foka páros. Síkba lehet-e úgy rajzolni, hogy a külső tartomány ötszög legyen, a belső tartományok pedig háromszögek? [5.28/a]

7. Igazoljuk, hogy egy síkgráf minden síkbarajzolásánál ugyanannyi tartomány keletkezik.

8. Egy 20 csúcsú konvex poliédernek 12 lapja van. Hány oldala van az egyes lapoknak, ha tudjuk, hogy ez a szám minden lapra azonos?

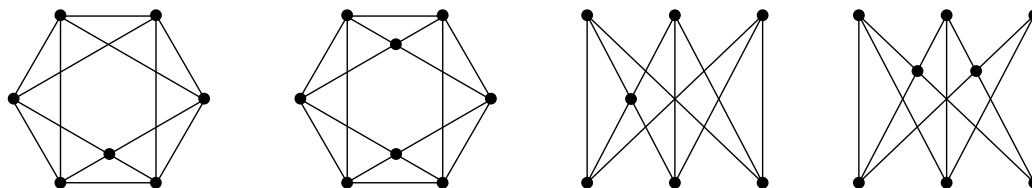
9. Igazoljuk a következőket:

- a) Minden egyszerű, legalább 3 pontú  $G$  síkgráfra  $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$ .
- b) Minden egyszerű, háromszögmentes, legalább 3 pontú  $G$  síkgráfra  $|E(G)| \leq 2|V(G)| - 4$ .
- c) Ha a  $G$  síkgráfban van kör, és derékbősége legalább  $g$ , akkor  $|E(G)| \leq \frac{g}{g-2}|V(G)| - \frac{2g}{g-2}$ .

10. Igazoljuk, hogy nincs olyan konvex poliéder, amelynek minden lapja hatszög.

11. A  $G_8$  egyszerű gráf csúcsai a  $8 \times 8$ -as sakktábla mezői, és két csúcs (mező) pontosan akkor összekötött, ha egyikből a másikba a király át tud lépni (egy lépésben). Döntsük el, hogy ez a gráf síkgráf-e.

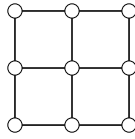
12. a) Határozzuk meg az alábbi gráfok metszési számát.



- b) Határozzuk meg  $K_6$  metszési számát.
- c) Határozzuk meg  $K_{4,4}$  metszési számát.
- d) Határozzuk meg a Petersen-gráf metszési számát.

13. Létezik-e olyan 6 pontú gráf, hogy se ő, se a komplementere nem síkbarajzolható?

14. Mutassuk meg, hogy az ábrán látható  $3 \times 3$ -as négyzetrács-gráfnak van  $K_4$ -minorja.



15. Bizonyítsuk be, hogy egy  $n$  pontú egyszerű síkgráf tetszőleges három különböző  $x, y, z$  csúcsára

$$d(x) + d(y) + d(z) \leq 2n + 2.$$

16. a) Igaz-e, hogy ha  $H$  topologikus részgráfja  $G$ -nek, akkor  $H$  minorja  $G$ -nek?

b) Igaz-e, hogy ha  $H$  minorja  $G$ -nek, akkor  $H$  topologikus részgráfja  $G$ -nek?

c)<sup>+</sup> Síkgráf-karakterizációs tételekre való hivatkozás nélkül bizonyítsuk be, hogy  $G$ -nek pontosan akkor minorja  $K_{3,3}$  vagy  $K_5$ , ha  $G$ -nek topologikus részgráfja  $K_{3,3}$  vagy  $K_5$ .