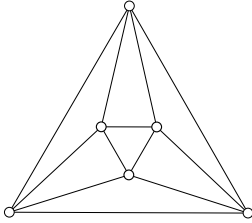


6. ÉLSZÍNEZÉSEK

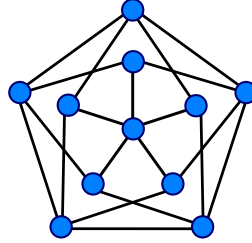
Vizing-tétel: Ha G egyszerű gráf, akkor $\chi_e(G) \leq \Delta(G) + 1$. (Tehát egyszerű gráfok esetén $\chi_e(G) = \Delta(G)$ vagy $\chi_e(G) = \Delta(G) + 1$.)

1. Határozzuk meg az alábbi gráfok élkromatikus számát.

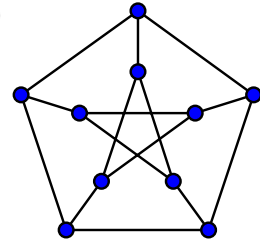
a)



b)



c)



- d) C_9 -ből a körön másodsomszédos csúcsok összekötésével nyert gráf,
 e) K_n teljes gráf.

2. a) Mutassuk meg, hogy minden 3-reguláris, Hamilton-kört tartalmazó gráf élkromatikus száma 3.

b) Van-e Hamilton-kör a Petersen-gráfban?

c) G egy hurokélmentes 3-reguláris gráf, melynek élkromatikus száma 3, és G élei a színek permutálásától eltekintve egyféleképpen színezhetők jól 3 színnel. Igazoljuk, hogy G -ben van Hamilton-kör.

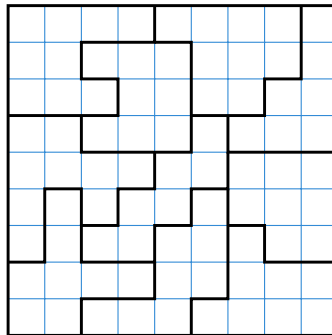
3. G egy összefüggő, 3-reguláris egyszerű gráf, amelyben van olyan él, amelyet elhagyva a kapott gráf már nem lesz összefüggő. Igazoljuk, hogy $\chi_e(G) = 4$.

4. a) Igazoljuk, hogy egy d -reguláris páros gráf élkromatikus száma d .

b) Igazoljuk, hogy ha G **páros gráf**, akkor $\chi_e(G) = \Delta(G)$.

5. A G gráf jól élszínezhető k színnel. Bizonyítsuk be, hogy G -nek van olyan jó élszínezése, amelyben minden szín $\lfloor \frac{|E(G)|}{k} \rfloor$ -szer vagy $\lceil \frac{|E(G)|}{k} \rceil$ -szer fordul elő.

6.⁺ A Bolyai Sudokuban a 9×9 -es négyzet kisebb tartományra van osztva úgy, hogy minden tartomány legfeljebb 9 mezőből áll. A tartományok tetszőleges alakúak lehetnek, egy példát mutat a lenti ábra. Igazoljuk, hogy a Bolyai Sudoku mezői kitölthetők 1-től 9-ig terjedő számokkal úgy, hogy semelyik sorban és semelyik tartományban ne legyen két egyforma szám. (Az oszlopokra nem követeljük meg ezt.)



7.⁺ Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges hurokélmentes G gráfra $\chi_e(G) \leq 3 \lceil \frac{\Delta(G)}{2} \rceil$.

Segítség: Használjuk fel a III/10. feladatot. (Először vizsgáljunk $2k$ -reguláris gráfokat.)

Megjegyzés: Ez a feladat már majdnem **Shannon tétele**, mely szerint $\chi_e(G) \leq \lceil \frac{3\Delta(G)}{2} \rceil$.

8.⁺ Igazoljuk, hogy K_{2n+1} élhalmaza előáll n darab Hamilton-kör élhalmazának (diszjunkt) uniójaként.