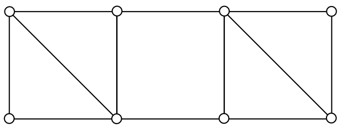
4. Párosítások általános gráfokban

Tutte-akadály: A G gráfban egy $X \subset V(G)$ ponthalmazt *Tutte-akadálynak* nevezünk, ha $c_1(G-X) > |X|$, ahol $c_1(G-X)$ a páratlan pontszámú komponensek száma a $G-X$ gráfban.

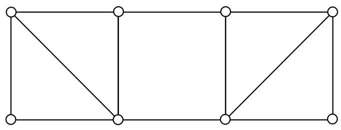
Tutte-tétel: Egy G gráfban akkor és csak akkor van teljes párosítás, ha nincs benne Tutte-akadály, azaz ha minden $X \subset V(G)$-re $c_1(G-X) \leq |X|$ teljesül.

1.$^-$ Határozzuk meg az alábbi gráfok ν és τ paramétereinek értékét.

a)



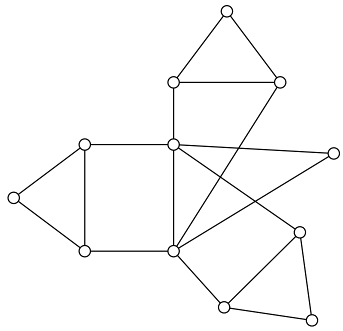
b)



c) Petersen-gráf

d) k mélységű teljes bináris fa.

e)



2. Hány teljes párosítás van

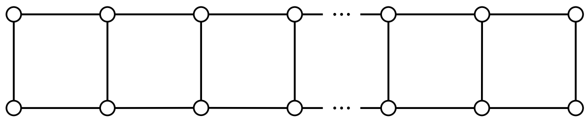
a) K_n-ben;

b) $K_{n,n}$-ben;

c) abban a gráfban, amelyet $K_{n,n}$-ből kapunk, ha elhagyjuk egy teljes párosításának éleit;

d) egy fában;

e) az alábbi $2n$ pontú gráfban?



3. Adott egy G egyszerű gráf, és annak egy M párosítása. M nem bővíthető triviálisan, azaz nincs olyan éle G-nek, amelyet M-hez hozzá lehetne venni nagyobb párosítást nyerve. (Ilyen M párosítás könnyen található mohó módon.) Igazoljuk, hogy

$$\frac{\nu(G)}{2} \leq |M| \leq \nu(G).$$

4. Egy $2n$ pontú egyszerű gráfban minden csúcs foka legalább n. Igazoljuk, hogy létezik teljes párosítás a gráfban. [7.22]

5. Bizonyítsuk be, hogy ha a G gráfban az M párosítás nem maximális élszámú, akkor javítható javító úttal.

6. Legyen M_0 a G gráf egy párosítása. Igazoljuk, hogy G-ben van olyan maximális élszámú párosítás, mely lefedi az összes M_0 által lefedett pontot. [7.23]

7. Két játékos egy adott G egyszerű gráf csúcsain lépked egy bábuval. Mindig az aktuális csúcs valamelyik szomszédjára léphet lépni, de tilos olyan csúcsra lépni, ahol korábban már járt a bábu. A játék kezdőlépése az, hogy az első játékos egy tetszőleges csúcsra leteszi a bábut, majd a második játékos következik, és a fenti szabály szerint felváltva lépnek. Az veszít, aki nem tud lépni. Jellemezzük azokat a gráfokat (gráfelméleti módon), amelyeknél a második játékosnak van nyerő stratégiája.

8. Legyen G egy összefüggő, egyszerű gráf, páros sok éllel. Tutte tételének felhasználásával mutassuk meg, hogy G (élhalmaza) előáll 2 hosszú utak (élhalmazának) éldiszjunkt uniójaként.

9. Bizonyítsuk be Petersen tételét, mely szerint egy kétszeresen élösszefüggő 3-reguláris gráfban mindig van teljes párosítás. (Egy gráf kétszeresen élösszefüggő, ha összefüggő, és bármely élét elhagyva is összefüggő marad.) [7.29]
Segítség: Használjuk a Tutte-tételt.

10.$^+$ Adott egy G gráf és egy $f\colon V(G) \to \mathbb{N}_0$ függvény. Feladatunk annak eldöntése, hogy létezik-e olyan feszítő részgráfja G-nek, amelyben a v csúcs fokszáma $f(v)$ minden v-re. Vezessük vissza ezt a feladatot egy alkalmas párosítási problémára (amely az Edmonds-algoritmussal hatékonyan megoldható).