2. Fák összeszámlálása

1.$^-$ Hány feszítőfája van P_n-nek, illetve C_n-nek?

2.$^-$ K_n feszítőfái között hány csillag, illetve hány út van (ha $n \geq 3$)?

3.$^-$ Hány olyan feszítőfája van K_n-nek, amelyben a v kitüntetett csúcs levél (ha $n \geq 3$)?

4. Hány olyan fa van n ponton, amelynek pontosan $n - l$ levele van? [4.8]

5. Jelölje a G gráf feszítőfáinak számát $t(G)$, és legyen e egy tetszőleges él G-ben. Bizonyítsuk be, hogy

$$t(G) = t(G - e) + t(G/e),$$

ahol a $G - e$ gráfot az e él elhagyásával, a G/e gráfot pedig az e él összehúzásával kapjuk G-ből.

6. Mi az olyan fák száma a $\{v_1, \dots v_n, w_1, \dots, w_m\}$ pontokon, melyekben minden él egy v_i-t köt össze egy w_j-vel? [4.11]

7. Az n pontú teljes gráfból elhagyunk egy élt ($n \geq 3$). A kapott gráfnak hány feszítőfája van?

8.$^+$ Legyen $n \geq 2$. Egy n pontú út minden pontját összekötjük egy új külső ponttal. Mutassuk meg, hogy az így kapott $n + 1$ pontú gráf feszítőfáinak száma az F_{2n-1} Fibonacci-szám ($F_0 = F_1 = 1$, $F_2 = 2$, $\dots$ indexeléssel).

9.$^+$ Adott n darab különböző szín: $c_1, \dots, c_n$. Hányféleképpen lehet egy c_1 színű, egy c_2 színű, ... , és egy c_n színű kört elhelyezni a síkon úgy, hogy a körvonalaknak (páronként) ne legyen közös pontja? Két lerakást pontosan akkor tekintünk egyformának, ha az egyik lerakás átdeformálható a másikba úgy, hogy a köröket egymástól függetlenül mozgathatjuk és nagyíthatjuk/kicsinyíthetjük, de végig megtartva azt a tulajdonságot, hogy a körök nem metszik egymást.

10.$^+$ Bizonyítsuk be az alábbi Abel-azonosságot kombinatorikus úton:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} k^{k-1}(n-k)^{n-k-1} = 2(n-1)n^{n-2}.$$

11. Határozzuk meg az $n + 1$ levelű teljes bináris síkfák számát.

12. Határozzuk meg az n élű síkfák számát.