1. Fokszámok

1.$^-$ Létezik-e olyan gráf, amelynek fokszámsorozata
a) $9, 7, 6, 6, 5, 4, 3, 3, 3, 1$
b) $8, 7, 6, 6, 5, 4, 3, 3, 3, 1$?

2. (Havel–Hakimi-algoritmus.) Az előadáson tanult tétel segítségével döntsük el, hogy létezik-e olyan *egyszerű* gráf, amelynek fokszámsorozata
a) $7, 4, 3, 3, 3, 3, 2, 1, 0$
b) $8, 8, 6, 6, 6, 5, 3, 2, 2$.

3. Hány olyan (páronként nem izomorf) egyszerű gráf van, melynek a fokszámsorozata $7, 7, 7, 7, 5, 5, 4, 4$?

4. Létezik-e olyan *összefüggő* gráf, amelynek fokszámsorozata $4, 4, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1$?

5. Létezik-e olyan *páros* gráf, amelynek fokszámsorozata $9, 9, 9, 9, 6, 6, 6, 6, 5, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3$?

6. Mutassuk meg, hogy pontosan akkor létezik n pontú k-reguláris *egyszerű* gráf, ha kn páros és $k \leq n - 1$. [5.2]

7. Mutassuk meg, hogy egy $2n$ csúcsú G gráf pontosan akkor reguláris, ha minden olyan $A \dot\cup B = V(G)$ csúcspartícionálásra, melyre $|A| = |B| = n$, a $G|_A$ feszített részgráfnak ugyanannyi éle van, mint $G|_B$-nek.

8. Az **Erdős–Gallai-tétel** szerint a nemnegatív egészekből álló $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$ sorozat pontosan akkor realizálható egyszerű gráffal, ha

$$d_1 + \cdots + d_n \text{ páros}, \quad \text{és} \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min(d_i, k), \quad \text{minden } k \in \{1, \ldots, n\}\text{-re.} \tag{2}$$

Bizonyítsuk be a feltételek szükségességét.

9.$^-$ Igazoljuk, hogy ha egy G egyszerű gráfban minden pont foka legalább 2, akkor a gráf tartalmaz legalább $\delta(G) + 1$ hosszú kört, ahol $\delta(G)$ a legkisebb fokszámot jelöli G-ben.

10. Igazoljuk, hogy ha egy egyszerű gráfban minden pont foka legalább 3, akkor a gráf tartalmaz páros kört. [10.2]

11.$^+$ Igazoljuk, hogy ha egy egyszerű gráfban minden pont foka legalább 3, akkor a gráf tartalmazza K_4 egy felosztását. [10.3]

12. Legyen $n \geq 2$. Bizonyítsuk be, hogy egy egyszerű gráffal realizálható $d_1, \ldots, d_n$ sorozat pontosan akkor realizálható *összefüggő* egyszerű gráffal, ha $\sum_{i=1}^{n} d_i \geq 2(n-1)$, és a sorozat minden tagja pozitív.

13. Az erdőben 12 törpe él piros vagy kék házikóban. Az év i-edik hónapjában az i-edik törpe felkeresi összes barátját, hogy eldöntse, átfesse-e a saját házát. Akkor és csak akkor fogja átfesteni (pirosról kékre vagy fordítva), ha a barátai (szigorú) többsége más színű házban lakik, mint ő. Ez évről évre így történik. Bizonyítsuk be, hogy egy idő után már senki nem festi át a házikóját! (A barátságok kölcsönösek és nem változnak az idő múlásával. Természetesen nem feltétlenül barátja mindenki mindenkinek.)

14.$^+$ Igazoljuk, hogy tetszőleges hurokélmentes gráfból alkalmas élek elhagyásával olyan páros gráfot kaphatunk, melyben minden csúcs foka legalább az eredeti fokszámának fele.
Következmény (BSc): Tetszőleges hurokélmentes gráfból páros gráfot kaphatunk legfeljebb az élek felének elhagyásával.

15. Egy G gráfban a fokszámok átlaga $\bar{d}(G)$. Igazoljuk, hogy G-nek van olyan F feszített részgráfja, melyre $\delta(F) \geq \frac{\bar{d}(G)}{2}$, ahol $\delta(F)$ az F gráf legkisebb fokszámát jelöli.

16.$^{+}$ Legyen $n \geq 1$ pozitív egész, és $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ pozitív egészek. Egy $t_n + 1$ tagú társaság tagjai lejátszanak néhány sakkpartit úgy, hogy két ember egymással legfeljebb egyszer játszhat. Igazoljuk, hogy teljesülhet egyszerre az alábbi két feltétel:

(i) A társaság minden egyes tagja által lejátszott partik száma a $t_1, t_2, \ldots, t_n$ számok egyike.

(ii) Minden i-re, ahol $1 \leq i \leq n$, van valaki, aki pontosan t_i sakkpartit játszott le.

17.$^{+}$ Adott egy tetszőleges G egyszerű gráf és egy k pozitív egész szám. Igazoljuk, hogy G csúcsai kiszínezhetők pirossal és kékkel úgy, hogy minden piros csúcsnak k-nál kevesebb piros szomszédja legyen, és minden kék csúcsnak legalább k piros szomszédja legyen.