

8. EXTREMÁLIS GRÁFELMÉLET

Ebben a feladatsorban csak egyszerű gráfokkal foglalkozunk!

1.⁻ Mutassuk meg, hogy ha egy n pontú egyszerű gráfban ($n \geq 4$) nincs két független él (azaz nincs 2 élű párosítás), akkor a gráfnak legfeljebb $n - 1$ éle lehet!

2. Legfeljebb hány éle lehet egy n pontú egyszerű gráfnak, ha nem tartalmaz

- a)⁻ kört;
- b) páratlan kört;
- c) háromszöget;
- d)⁺ páros kört?

[10.1]

3. Legfeljebb hány éle lehet egy n pontú egyszerű gráfnak, ha a kromatikus száma k ?

4. Adott n különböző pont az egységkörvonalon.

- a) Legfeljebb hány pontpárra teljesül, hogy a pontok távolsága 1,8-nél nagyobb?
- b) Legfeljebb hány pontpárra teljesül, hogy a pontok távolsága 1,5-nél nagyobb?

Segítség: $\sqrt{2} = 1,414\dots$ és $\sqrt{3} = 1,732\dots$

5. Igazoljuk, hogy ha egy egyszerű gráf derékbősége $2k$ -nál nagyobb, akkor $n(n^{1/k} + 1)$ -nél kevesebb éle van!

Megjegyzés: A Bondy–Simonovits-tétel szerint már az is $O(n^{1+1/k})$ felső élszámkorlátot ad, ha csak a $2k$ hosszú köröket tiltjuk meg a gráfban.

6. (Kővári–Sós–Turán-tétel.) A G egyszerű gráfnak nem részgráfja $K_{r,s}$, ahol $2 \leq r \leq s$.

Bizonyítsuk be, hogy G -nek legfeljebb $\frac{\sqrt{s-1}}{2}n^{2-1/r} + \frac{r-1}{2}n = O(n^{2-1/r})$ éle lehet! [10.37]

Segítség: Előadáson szerepelt az $r = s = 2$ eset bizonyítása, annak gondolatmenete értelem-szerűen általánosítható. (A számolás lesz kicsit nehezebb.)

Megoldatlan sejtés: A pontos felső korlát nagyságrendje $\Theta(n^{2-1/r})$.

7. Adott a síkon n pont. Igazoljuk, hogy legfeljebb $O(n^{3/2})$ olyan pontpár van, melynek pontjai egységtávolságra vannak egymástól!

Segítség: Használjuk az előző feladatot!

8. Adott n pont a síkon ($n \geq 3$) úgy, hogy bármely kettő távolsága legalább 1. Igazoljuk, hogy legfeljebb $3n - 6$ pontpárra lehet a pontok távolsága pontosan 1.

9. Mutassuk meg, hogy ha egy gráf kromatikus száma k , akkor a gráf tartalmazza az összes k pontú fát részgráfként!

10.⁺ n éhes matematikus hallgató m egyforma pizzán osztozkodik úgy, hogy mindenkinek ugyanakkora adag jár. Igazoljuk, hogy legalább $m + n - (m, n)$ pizzaszeletre kell vágni a pizzákat, és ennyi szelettel meg is oldható az elosztás, ahol (m, n) a legnagyobb közös osztót jelöli.

11.⁺ Legyen T egy tetszőleges k élű fa. Az Erdős–T. Sós sejtés szerint ha egy n pontú G egyszerű gráf nem tartalmazza a T fát (részgráfként), akkor G -nek legfeljebb $\frac{k-1}{2}n$ éle lehet. Bizonyítsuk be a sejtést abban a speciális esetben, amikor T csillag vagy út!

12.⁺ Három iskola mindegyikében n tanuló van. Minden tanuló a másik két iskolából együttvéve $n + 1$ tanulót ismer. Bizonyítsuk be, hogy választható a három iskola mindegyikéből egy-egy tanuló úgy, hogy mindegyikük ismeri a másik kettőt. (Az ismeretségek kölcsönösek.)