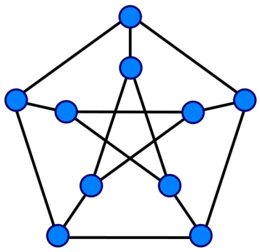
1. ZÁRTHELYI DOLGOZAT

1. Határozzuk meg az ábrán látható Petersen-gráf kromatikus számát!



2. (a) Határozzuk meg $\kappa(K_{2012,2013})$-at, vagyis azt a legnagyobb k természetes számot, melyre a $K_{2012,2013}$ teljes páros gráf k-szorosan összefüggő!

(b) Határozzuk meg $\kappa_e(K_{2012,2013})$-at, vagyis azt a legnagyobb l természetes számot, melyre a $K_{2012,2013}$ teljes páros gráf l-szeresen élösszefüggő!

3. Az erdőben 12 törpe él piros vagy kék házikóban. Az év i-edik hónapjában az i-edik törpe felkeresi összes barátját, hogy eldöntse, átfesse-e a saját házát. Akkor és csak akkor fogja átfesteni (pirosról kékre vagy fordítva), ha a barátai (szigorú) többsége más színű házban lakik, mint ő. Ez évről évre így történik. Bizonyítsuk be, hogy egy idő után már senki nem festi át a házikóját! (A barátságok kölcsönösek és nem változnak az idő múlásával.)

4. Igazoljuk, hogy a $K_{m,n}$ teljes páros gráfnak $m^{n-1}n^{m-1}$ feszítőfája van!

5. G egy kétszeresen összefüggő egyszerű gráf n ponttal és m éllel. Igazoljuk, hogy G tetszőleges két különböző pontja között létezik legalább $m-n+2$ különböző út!
Segítség: Alkalmazzuk a kétszeresen összefüggő gráfok struktúratételét, és dolgozzunk indukcióval. Az indukciós bizonyítás nemtriviális részénél jusson eszünkbe a karom lemma.

6.$^{+}$ Bizonyítsuk be az alábbi Abel-azonosságot:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} k^{k-1}(n-k)^{n-k-1} = 2(n-1)n^{n-2}.$$

Minden feladat teljes megoldása 5 pontot ér. *Jó munkát!*