

7. TÖBBSZÖRÖS ÖSSZEFÜGGŐSÉG

Definíció. Egy G gráf k -szorosán élösszefüggő, ha G -ből bárhogy hagyunk el k -nál kevesebb élt, a kapott gráf összefüggő lesz.

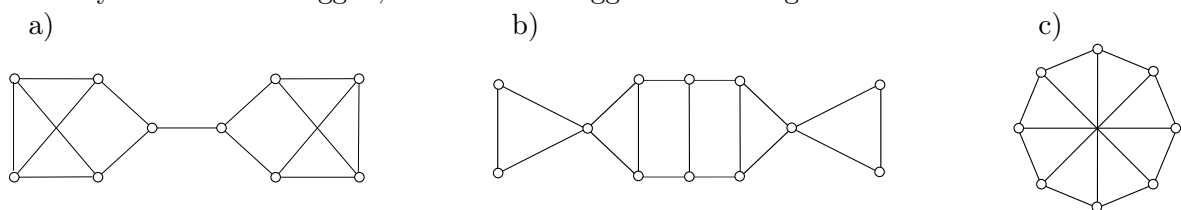
Egy G gráf k -szorosán összefüggő, ha G -ből bárhogy hagyunk el k -nál kevesebb csúcsot, a kapott gráf összefüggő lesz, továbbá legalább $k + 1$ csúcsa van G -nek.

Megjegyzés. Az első definíció egy másik megfogalmazása: G pontosan akkor k -szorosán élösszefüggő, ha minden G -beli U ponthalmazra $|\partial U| \geq k$ (ha $\emptyset \subsetneq U \subsetneq V(G)$).

Menger-tételek.

- a) Egy gráf akkor és csak akkor k -szorosán élösszefüggő, ha bármely két pontja között létezik k éldiszjunkt út.
- b) Egy gráf akkor és csak akkor k -szorosán összefüggő, ha bármely két pontja között létezik k (belső)pontdiszjunkt út, továbbá legalább $k + 1$ pontja van.

1. Hányszorosán összefüggők, illetve élösszefüggők az alábbi gráfok?



- d) Petersen-gráf;
 - e) a $K_{m,n}$ teljes páros gráf;
 - f) Q_n , az n -dimenziós kocka. (Q_n csúcsai az n hosszú 0-1 (bit)sorozatok, és két csúcs pontosan akkor összekötött, ha a megfelelő bitsorozatok pontosan 1 bitben térnek el.)
- 2.a) A Menger-tételekre való hivatkozás nélkül mutassuk meg, hogy minden k -szorosán összefüggő gráf k -szorosán élösszefüggő is.
- b) Adjunk meg egy olyan egyszerű gráfot, amely 2015-szörösen élösszefüggő, de nem kétszeresen összefüggő.
3. Bizonyítsuk be, hogy egy kétszeresen élösszefüggő gráf fülragasztással történő felépítése mindig ugyanannyi lépésből áll.
4. Igazoljuk, hogy minden legalább két pontú, minimális kétszeresen élösszefüggő gráfnak van másodfokú pontja. (Egy gráf minimális kétszeresen élösszefüggő gráf, ha kétszeresen élösszefüggő, de bármely élet elhagyva már nem az.)
5. Igazoljuk, hogy minden összefüggő k -reguláris páros gráf kétszeresen is összefüggő ($k \geq 2$).
6. (Karom-lemma.) A k -szorosán összefüggő G gráfban adott egy $s \in V(G)$ csúcs és egy k pontból álló $T \subset V(G)$ halmaz, amely nem tartalmazza s -et. Bizonyítsuk be, hogy létezik k darab, s -ből induló és T -ben végződő, páronként pontdiszjunkt út. (A pontdiszjunkttság az s közös kezdőpontot leszámítva értendő.)
7. Igazoljuk, hogy egy k -szorosán összefüggő gráfban tetszőleges k ponthoz található olyan kör, amely tartalmazza őket (ha $k \geq 2$).
8. G egy k -szorosán összefüggő gráf, ahol $|V(G)| \geq 2k$, és $k \geq 2$. Mutassuk meg, hogy G -ben van legalább $2k$ hosszú kör.
- 9.+ Igazoljuk, hogy ha egy gráf (kromatikus számra vonatkozóan) k -kritikus, akkor $(k - 1)$ -szeresen élösszefüggő.