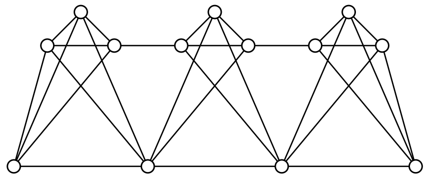
6. CSÚCSSZÍNEZÉSEK, DERÉKBŐSÉG

1. Bizonyítsuk be a Hajós-tétel egyszerűbb irányát: Ha egy gráf Hajós-konstruálható K_{k+1}-ből, akkor nem k-színezhető.

2.$^-$ Határozzuk meg az alábbi gráf kromatikus számát! Az alsó becslésnél Hajós-konstrukcióval érveljünk.

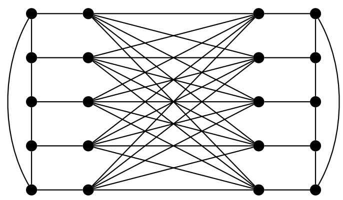


3. A Hajós-tételre való hivatkozás nélkül mutassuk meg, hogy minden nem 2-színezhető gráf Hajós-konstruálható K_3-ból.

4. Azt mondjuk, hogy a G gráf k-kritikus, ha $\chi(G) = k$, de bármely valódi H részgráfjára $\chi(H) < k$.

a) Határozzuk meg a 3-kritikus gráfokat! [9.17/a]

b) Valamely páratlan n-re a $K_{n,n}$ teljes páros gráf színosztályait kössük össze egy-egy n pontú körrel az ábrán látható módon. Igazoljuk, hogy a kapott gráf 4-kritikus! [9.17/b]



c) Mutassuk meg, hogy egy k-kritikus gráfban minden pont foka legalább $k-1$.

5. A $KG(n,k)$ Kneser-gráf csúcsai az $\{1,\dots,n\}$ halmaz k elemű részhalmazai, és két csúcs (részhalmaz) pontosan akkor összekötött, ha diszjunktak. Mutassuk meg, hogy $n \geq 2k$ esetén $\chi(KG(n,k)) \leq n-2k+2$.
Megjegyzés: Lovász László híres eredménye, hogy valójában egyenlőség teljesül. Bizonyításában topológiai érvelést használt.

6. Egy G gráf élhalmaza felbontható három olyan diszjunkt részre, melyek mindegyike páros gráfot alkot. Mutassuk meg, hogy $\chi(G) \leq 8$.

7. Egy G egyszerű gráfban bármely két páratlan kör metszi egymást. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq 5$.

8.$^-$ Határozzuk meg a Petersen-gráf derékbőségét.

9.$^-$ Mutassuk meg, hogy ha egy k-reguláris gráf derékbősége 4, akkor legalább $2k$ pontja van a gráfnak.

10. Igazoljuk, hogy ha egy n pontú egyszerű gráf δ minimális fokszámára $\delta > 2$, akkor a gráf derékbősége legfeljebb $2\log_{\delta-1} n + 2$.

11.$^+$ Egy hatalmas asztalon 2000 pénzérme van (nem feltétlenül egyformák). Néhány ezek közül érinti egymást, de átfedés nincs. Mutassuk meg, hogy kiválasztható 500 érme úgy, hogy közülük semelyik kettő ne érintse egymást!

12.$^+$ Egy elzárt szigeten felütötte a fejét egy vírus, egy ember megfertőződött. A vírus terjedése a következő: Ha valaki megfertőződik, akkor a következő napon ő maga immúnissá válik a vírusra, egyúttal minden (nem immúnis) ismerősét megfertőzi, az azután következő napon azonban már nem lesz immúnis, újra megfertőződhet. Előfordulhat-e, hogy a vírus soha nem hal ki? (Feltesszük, hogy az „ismeretségek gráfja” állandó.)

13.$^+$ Tegyük fel, hogy G-nek van olyan jó csúcsszínezése, melyben minden szín legalább kétszer előfordul. Mutassuk meg, hogy ekkor G-nek van ilyen színezése $\chi(G)$ színnel is! [9.4]

14.$^+$ Igazoljuk, hogy egy 6-nál több pontú 3-reguláris G egyszerű gráf csúcshalmazának létezik olyan partícionálása két nemüres, A és B osztályra úgy, hogy a $G|_A$ és $G|_B$ gráfban is minden csúcs foka legalább 2.

15.$^+$ A G gráf kromatikus száma k. Igazoljuk, hogy G éleit tetszőlegesen két színnel színezve lesz olyan k pontú részfa, melynek élei ugyanolyan színűek!
Segítség: Bizonyítsunk indirekt módon, és vezessük vissza a problémát egy Bolyai Sudokuhoz hasonló problémára (vö. előző feladatsor).