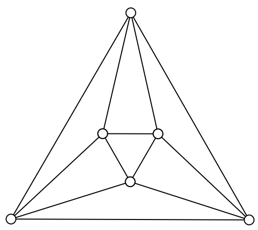
5. ÉLSZÍNEZÉSEK

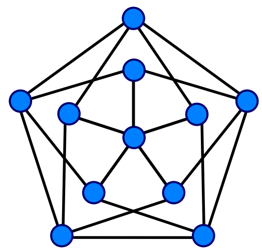
Vizing-tétel: Ha G *egyszerű* gráf, akkor $\chi_e(G) \leq \Delta(G) + 1$. (Tehát egyszerű gráfok esetén $\chi_e(G) = \Delta(G)$ vagy $\chi_e(G) = \Delta(G) + 1$.)

1. Határozzuk meg az alábbi gráfok élkromatikus számát!

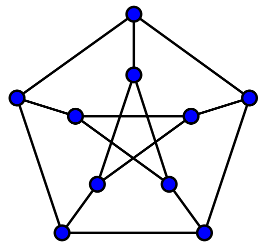
a)



b)



c)



d) C_9-ből a körön másodszomszédos csúcsok összekötésével nyert gráf,
e) K_n teljes gráf.

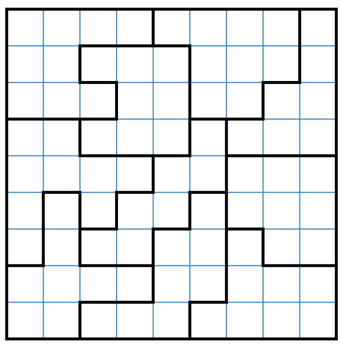
2. a) Mutassuk meg, hogy minden 3-reguláris, Hamilton-kört tartalmazó gráf élkromatikus száma 3.
b) Van-e Hamilton-kör a Petersen-gráfban?
c) G egy hurokélmentes 3-reguláris gráf, melynek élkromatikus száma 3, és G élei a színek permutálásától eltekintve egyféleképpen színezhetők jól 3 színnel. Igazoljuk, hogy G-ben van Hamilton-kör!

3. G egy összefüggő, 3-reguláris egyszerű gráf, amelyben van olyan él, amelyet elhagyva a kapott gráf már nem lesz összefüggő. Igazoljuk, hogy $\chi_e(G) = 4$.

4. a) Igazoljuk, hogy egy d-reguláris páros gráf élkromatikus száma d.
b) Igazoljuk, hogy ha G **páros gráf**, akkor $\chi_e(G) = \Delta(G)$.

5. A G gráf jól élszínezhető k színnel. Bizonyítsuk be, hogy G-nek van olyan jó élszínezése, amelyben minden szín $\left\lfloor \frac{|E(G)|}{k} \right\rfloor$-szer vagy $\left\lceil \frac{|E(G)|}{k} \right\rceil$-szer fordul elő!

6.$^+$ A Bolyai Sudokuban a 9×9-es négyzetet tetszőleges alakú kisebb cellákra osztottuk. Igazoljuk, hogy ha minden ilyen cella legfeljebb 9 mezőből áll, akkor kitölthetők a Sudoku mezői 1-től 9-ig terjedő számokkal úgy, hogy semelyik sorban és semelyik cellában ne legyen két egyforma szám! (Az oszlopokra nem követeljük meg ezt.)



7.$^+$ Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges hurokélmentes G gráfra $\chi_e(G) \leq 3\left\lceil \frac{\Delta(G)}{2} \right\rceil$.
Segítség: Használjuk fel a III/10. feladatot. (Először vizsgáljunk $2k$-reguláris gráfokat.)
Megjegyzés: Ez a feladat már majdnem **Shannon tétele**, mely szerint $\chi_e(G) \leq \left\lfloor \frac{3\Delta(G)}{2} \right\rfloor$.

8.$^+$ Igazoljuk, hogy K_{2n+1} élhalmaza előáll n darab Hamilton-kör élhalmazának (diszjunkt) uniójaként!