

2. FESZÍTŐFÁK ÖSSZESZÁMLÁLÁSA

- 1.- Hány feszítőfája van P_n -nek, illetve C_n -nek?
- 2.- K_n feszítőfái között hány út, illetve hány csillag van (ha $n \geq 2$)?
- 3.- Hány olyan feszítőfája van K_n -nek, amelyben a v kitüntetett csúcs levél (ha $n \geq 2$)?
4. Hány olyan fa van n ponton, amelynek pontosan $n - l$ levele van? [4.8]
5. Jelölje a G gráf feszítőfáinak számát $t(G)$, és legyen e egy tetszőleges él G -ben. Bizonyítsuk be, hogy

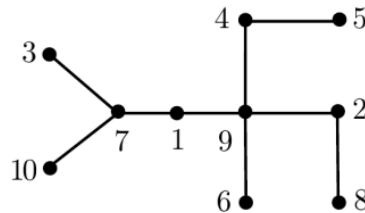
$$t(G) = t(G - e) + t(G/e),$$

ahol a $G - e$ gráfot az e él elhagyásával, a G/e gráfot pedig az e él összehúzásával kapjuk G -ből.

6. Mi az olyan fák száma a $\{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m\}$ pontokon, melyekben minden él egy v_i -t köt össze egy w_j -vel? [4.11]
7. Az n pontú teljes gráfból elhagyunk egy élt ($n \geq 2$). A kapott gráfnak hány feszítőfája van?
8. Legyen $n \geq 2$. Egy n pontú út minden pontját összekötjük egy külső ponttal oly módon, hogy a két végponthoz kétszeres él, a belső pontokhoz pedig egyszeres él vezet. Mutassuk meg, hogy az így kapott $n + 1$ pontú gráf feszítőfáinak száma az F_{2n+1} Fibonacci-szám ($F_0 = F_1 = 1, F_2 = 2, \dots$ indexeléssel).
- 9.+ Bizonyítsuk be az alábbi Abel-azonosságot kombinatorikus úton:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} k^{k-1} (n-k)^{n-k-1} = 2(n-1)n^{n-2}.$$

10. Határozza meg az ábrán látható címkézett fa Prüfer-kódját:



11. a) Adja meg azt a címkézett fát, amelynek a Prüfer-kódja 5, 3, 3, 3, 1, 4.
 b) Adja meg azt a címkézett fát, amelynek a Prüfer-kódja 1, 5, 1, 5, 9, 8, 2.