

Élszínezések

(a Vizing-tétel bizonyítása)

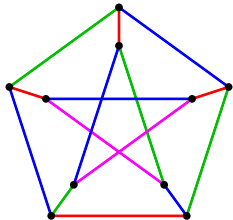
Diszkrét matematika

6. előadás

SZTE Bolyai Intézet
Szeged, 2015. október 6.

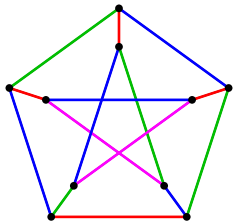
A G gráf élszínezése alatt egy $s: E(G) \rightarrow \mathcal{P}$ függvényt értünk, ahol $\mathcal{P}$ egy halmaz (a „színpaletta”). Ezzel csak azt formalizáltuk, hogy „ G minden élét kiszínezzük egy $\mathcal{P}$ -beli színnel”.

Definíció. A hurokélmentes G gráf egy élszínezése **jó élszínezés**, ha nincs két azonos színű összefutó él.



A G gráf élszínezése alatt egy $s: E(G) \rightarrow \mathcal{P}$ függvényt értünk, ahol $\mathcal{P}$ egy halmaz (a „színpaletta”). Ezzel csak azt formalizáltuk, hogy „ G minden élét kiszínezzük egy $\mathcal{P}$ -beli színnel”.

Definíció. A hurokélmentes G gráf egy élszínezése **jó élszínezés**, ha nincs két azonos színű összefutó él.



Megjegyzés. „nincs két azonos színű összefutó él” =
„minden csúcsból csupa különböző színű él indul” =
„az azonos színt kapott élek egy párosítást alkotnak”.

A G gráf élszínezése alatt egy $s: E(G) \rightarrow \mathcal{P}$ függvényt értünk, ahol $\mathcal{P}$ egy halmaz (a „színpaletta”). Ezzel csak azt formalizáltuk, hogy „ G minden élét kiszínezzük egy $\mathcal{P}$ -beli színnel”.

Definíció. A hurokélmentes G gráf egy élszínezése **jó élszínezés**, ha nincs két azonos színű összefutó él.

Definíció. A G gráf **élkromatikus száma** az a legkisebb szám, ahány szín felhasználásával G jól élszínezhető:

$$\chi_e(G) := \min\{k : \text{Létezik jó } E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\} \text{ élszínezés}\}.$$

A G gráf élszínezése alatt egy $s: E(G) \rightarrow \mathcal{P}$ függvényt értünk, ahol $\mathcal{P}$ egy halmaz (a „színpaletta”). Ezzel csak azt formalizáltuk, hogy „ G minden élét kiszínezzük egy $\mathcal{P}$ -beli színnel”.

Definíció. A hurokélmentes G gráf egy élszínezése **jó élszínezés**, ha nincs két azonos színű összefutó él.

Definíció. A G gráf **élkromatikus száma** az a legkisebb szám, ahány szín felhasználásával G jól élszínezhető:

$$\chi_e(G) := \min\{k : \text{Létezik jó } E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\} \text{ élszínezés}\}.$$

Tehát.

$\chi_e(G) = k$: „ G jól élszínezhető k színnel, de kevesebbnel nem.”

$\chi_e(G) \leq k$: „ G jól élszínezhető k színnel.”

$\chi_e(G) \geq k$: „ G minden jó élszínezése legalább k színt használ.”

Megjegyzés. Hurokél jelenléte esetén nincs jó élszínezése a gráfnak, ezért a mai órán csak hurokélmentes gráfokkal foglalkozunk!

Emlékeztető: $\Delta(G)$ a G gráf maximális fokszámát jelöli.

Észrevétel. Minden G gráfra

$$\chi_e(G) \geq \Delta(G).$$

Emlékeztető: $\Delta(G)$ a G gráf maximális foksámát jelöli.

Észrevétel. Minden G gráfra

$$\chi_e(G) \geq \Delta(G).$$

Ez nyilvánvaló, hiszen ha tekintünk egy $\Delta(G)$ fokú csúcsot, akkor a csúcsból induló élekre minden jó színezésnek ki kell osztania $\Delta(G)$ különböző színt.

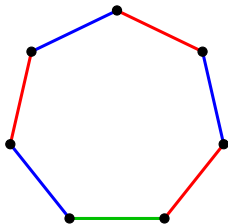
Emlékeztető: $\Delta(G)$ a G gráf maximális fokszámát jelöli.

Észrevétel. Minden G gráfra

$$\chi_e(G) \geq \Delta(G).$$

Ez nyilvánvaló, hiszen ha tekintünk egy $\Delta(G)$ fokú csúcsot, akkor a csúcsból induló élekre minden jó színezésnek ki kell osztania $\Delta(G)$ különböző színt.

Előfordulhat $\chi_e(G) > \Delta(G)$ is, ezt például a páratlan körök mutatják. ($\Delta(C_{2k+1}) = 2$, de $\chi_e(C_{2k+1}) = 3$.)



Emlékeztető: $\Delta(G)$ a G gráf maximális fokszámát jelöli.

Észrevétel. Minden G gráfra

$$\chi_e(G) \geq \Delta(G).$$

Ez nyilvánvaló, hiszen ha tekintünk egy $\Delta(G)$ fokú csúcsot, akkor a csúcsból induló élekre minden jó színezésnek ki kell osztania $\Delta(G)$ különböző színt.

Előfordulhat $\chi_e(G) > \Delta(G)$ is, ezt például a páratlan körök mutatják. ($\Delta(C_{2k+1}) = 2$, de $\chi_e(C_{2k+1}) = 3$.)

Páros gráfok esetén azonban mindig egyenlőség áll fenn:

Tétel. Ha G **páros** gráf, akkor

$$\chi_e(G) = \Delta(G).$$

Tétel. Ha G páros gráf, akkor

$$\chi_e(G) = \Delta(G).$$

Tétel. Ha G **páros** gráf, akkor

$$\chi_e(G) = \Delta(G).$$

Bizonyítás. Élszám szerinti indukcióval bizonyítunk. (0 és 1 élű gráfokra triviálisan igaz a bizonyítandó.) Tegyük fel, hogy a G -nél kevesebb élű páros gráfokra teljesül állítás.

Tétel. Ha G páros gráf, akkor

$$\chi_e(G) = \Delta(G).$$

Bizonyítás. Élszám szerinti indukcióval bizonyítunk. (0 és 1 élű gráfokra triviálisan igaz a bizonyítandó.) Tegyük fel, hogy a G -nél kevesebb élű páros gráfokra teljesül állítás.

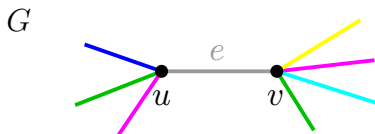
A $\chi_e(G) \geq \Delta(G)$ észrevételünk szerint $\chi_e(G) = \Delta(G)$ bizonyításához elég megmutatni, hogy G jól élszínezhető $\Delta := \Delta(G)$ színnel.

Tétel. Ha G páros gráf, akkor

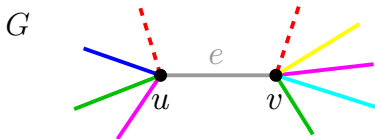
$$\chi_e(G) = \Delta(G).$$

Bizonyítás. Élszám szerinti indukcióval bizonyítunk. (0 és 1 élű gráfokra triviálisan igaz a bizonyítandó.) Tegyük fel, hogy a G -nél kevesebb élű páros gráfokra teljesül állítás.

A $\chi_e(G) \geq \Delta(G)$ észrevételünk szerint $\chi_e(G) = \Delta(G)$ bizonyításához elég megmutatni, hogy G jól élszínezhető $\Delta := \Delta(G)$ színnel. Legyen $e = uv \in E(G)$ tetszőleges él. Az indukciós feltevés szerint a $G - e$ páros gráfnak létezik egy (legfeljebb) $\Delta(G - e) \leq \Delta$ szint használó jó élszínezése. Erre gondolhatunk úgy, hogy G éleit az e élt leszámítva már jól kiszíneztük egy Δ méretű paletta színeit használva, már csak e -nek kell úgy szint adni, hogy ne lépünk ki a palettánkból. (Persze ehhez a már kiosztott színek módosítására is szükség lehet.)



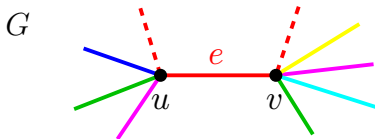
Mivel az u és v csúcsokra legfeljebb $\Delta - 1$ színezett él illeszkedik, ezért u -hoz is és v -hez is található olyan szín a Δ méretű palettában, amelyet nem használtunk fel a kiinduló éleken (szleng: ezek a **szabad színek** u és v körül).



Mivel az u és v csúcsokra legfeljebb $\Delta - 1$ színezett él illeszkedik, ezért u -hoz is és v -hez is található olyan szín a Δ méretű palettában, amelyet nem használtunk fel a kiinduló éleken (szleng: ezek a **szabad színek** u és v körül).

1. eset: Ha találunk olyan színt a palettában, amelyet sem u , sem v körül nem használtunk fel, akkor készen vagyunk, ezt a színt e -re kiosztva G egy jó élszínezését kapjuk.

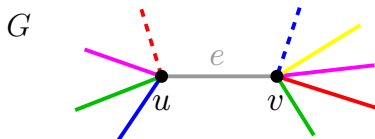
Ábráinkon a még színezetlen éleket szürkével, a szabad színeket szaggatott vonallal szemléltetjük.



Mivel az u és v csúcsokra legfeljebb $\Delta - 1$ színezett él illeszkedik, ezért u -hoz is és v -hez is található olyan szín a Δ méretű palettában, amelyet nem használtunk fel a kiinduló éleken (szleng: ezek a **szabad színek** u és v körül).

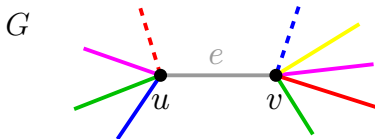
1. eset: Ha találunk olyan színt a palettában, amelyet sem u , sem v körül nem használtunk fel, akkor készen vagyunk, ezt a színt e -re kiosztva G egy jó élszínezését kapjuk.

Ábráinkon a még színezetlen éleket szürkével, a szabad színeket szaggatott vonallal szemléltetjük.



1. eset: Ha találunk olyan színt a palettában, amelyet sem u , sem v körül nem használtunk fel, akkor készen vagyunk, ezt a színt e -re kiosztva G egy jó élszínezését kapjuk.

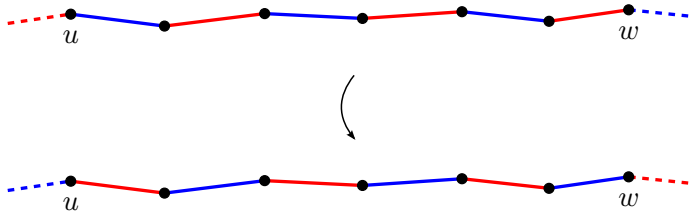
2. eset: Ha nem vagyunk ilyen szerencsések, akkor tekintsünk egy szabad színt u körül (legyen ez mondjuk a piros), és egy szabad színt v körül (legyen ez a kék). Feltevésünk szerint most van u -ra illeszkedő kék, és v -re illeszkedő piros él.



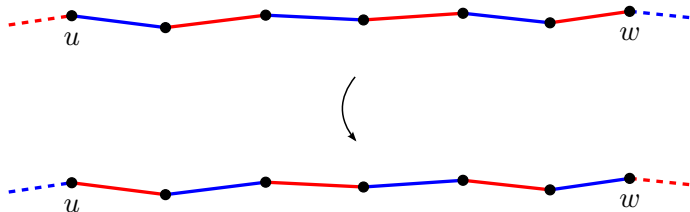
1. eset: Ha találunk olyan színt a palettában, amelyet sem u , sem v körül nem használtunk fel, akkor készen vagyunk, ezt a színt e -re kiosztva G egy jó élszínezését kapjuk.

2. eset: Ha nem vagyunk ilyen szerencsések, akkor tekintsünk egy szabad színt u körül (legyen ez mondjuk a piros), és egy szabad színt v körül (legyen ez a kék). Feltevésünk szerint most van u -ra illeszkedő kék, és v -re illeszkedő piros él. Célunk az u -ra illeszkedő kék élt pirossá színezni, és ezzel felszabadítani a kék színt u körül. Persze egy ilyen átszínezés miatt további átszínezések szükségesek. Ennek végiggondolása a későbbiekben is hasznos lesz, ezért megszakítjuk a bizonyítást. (FOLYT. KÖV.)

Legyen G egy jól élszínezett gráf. Tegyük fel, hogy az u csúcsra illeszkedő éleken nem használjuk fel a piros színt a palettánk-ból, a kék színt viszont igen. A piros és kék élek egy olyan R részgráfját alkotják G -nek, amelyben minden csúcs foka legfeljebb 2, így R komponensei utak és körök. R -ben az u csúcs foka 1, ezért u egy kék-piros út komponens egyik végpontja (legyen w a másik végpont). Ha ezen az úton megcseréljük a piros és kék színeket, továbbra is egy jó élszínezését kapunk G -nek, ez a **Kempe-átszínezés**.

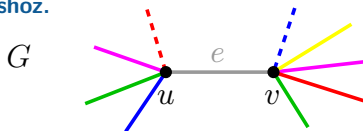


Emlékeztető: Tegyük fel, hogy az u csúcsra illeszkedő éleken nem használjuk fel a piros színt, a kék színt viszont igen. Ha az u -ból induló kék-piros „Kempe-úton” megcseréljük a színeket, továbbra is egy jó élszínezést kapunk, ez a **Kempe-átszínezés**.



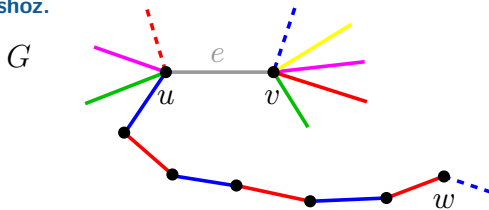
Kempe-átszínezés esetén csak az út két végpontjánál (u -nál és w -nél) változik meg a csúcsból induló éleken felhasznált/szabad színek halmaza, a gráf többi csúcsánál nem!

Vissza a bizonyításhoz.



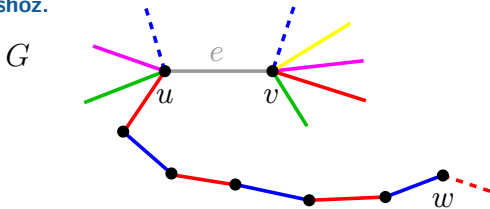
Ott tartottunk, hogy az u csúcsnál is szabaddá akartuk tenni a kék színt, hogy utána az e élt kékkel színezhessük.

Vissza a bizonyításhoz.



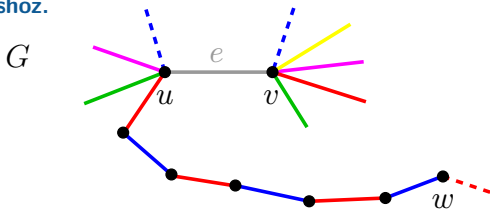
Ott tartottunk, hogy az u csúcsnál is szabaddá akartuk tenni a kék színt, hogy utána az e élt kézzel színezhessük. Végezzünk Kempe-átszínezést az u -ból indított kék-piros úton!

Vissza a bizonyításhoz.



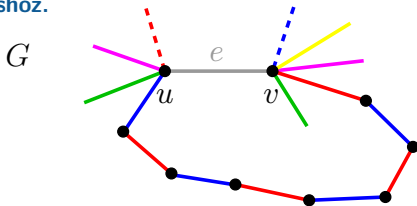
Ott tartottunk, hogy az u csúcsnál is szabaddá akartuk tenni a kék színt, hogy utána az e élt kézzel színezhessük. Végezzünk Kempe-átszínezést az u -ból indított kék-piros úton! Ezzel elérjük a célt, az u csúcsnál szabaddá válik a kék szín. Az e él kaphatja a kék színt,

Vissza a bizonyításhoz.



Ott tartottunk, hogy az u csúcsnál is szabaddá akartuk tenni a kék színt, hogy utána az e élt kézzel színezhessük. Végezzünk Kempe-átszínezést az u -ból indított kék-piros úton! Ezzel elérjük a célt, az u csúcsnál szabaddá válik a kék szín. Az e él kaphatja a kék színt, HA v körül a Kempe-átszínezés után is szabad szín marad a kék. Ez pedig teljesül, mert G párossága miatt $w \neq v$ (és csak a Kempe-út végpontjainak szabad színei változnak):

Vissza a bizonyításhoz.



Ott tartottunk, hogy az u csúcsnál is szabaddá akartuk tenni a kék színt, hogy utána az e élt kézzel színezhessük. Végezzünk Kempe-átszínezést az u -ból indított kék-piros úton! Ezzel elérjük a célt, az u csúcsnál szabaddá válik a kék szín. Az e él kaphatja a kék színt, HA v körül a Kempe-átszínezés után is szabad szín marad a kék. Ez pedig teljesül, mert G párossága miatt $w \neq v$ (és csak a Kempe-út végpontjainak szabad színei változnak): A $w = v$ feltételezéssel élve az $u \rightsquigarrow v$ kék-piros Kempe-út páros hosszú lenne (v -be csak piros él vezet), ami e -vel együtt egy páratlan kört adna, de ez páros gráfban lehetetlen. $\square$

Láttuk, hogy páratlan körök esetén $\chi_e(C_{2k+1}) = \Delta(C_{2k+1}) + 1$ áll fenn. Egyszerű gráfok esetén ennél nagyobb különbség nem lehet az élkromatikus szám és a maximális fokszám között:

Vizing-tétel. Ha G egyszerű gráf, akkor

$$\chi_e(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Megjegyzés. Tehát egyszerű gráfok esetén $\chi_e(G) = \Delta(G)$, vagy $\chi_e(G) = \Delta(G) + 1$.

Láttuk, hogy páratlan körök esetén $\chi_e(C_{2k+1}) = \Delta(C_{2k+1}) + 1$ áll fenn. Egyszerű gráfok esetén ennél nagyobb különbség nem lehet az élkromatikus szám és a maximális fokszám között:

Vizing-tétel. Ha G egyszerű gráf, akkor

$$\chi_e(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Megjegyzés. Tehát egyszerű gráfok esetén $\chi_e(G) = \Delta(G)$, vagy $\chi_e(G) = \Delta(G) + 1$.

Bizonyítás (vázlat). Legyen $\Delta := \Delta(G)$. A bizonyítás első lépései az előző bizonyításban látottakhoz hasonlóan történnek, ezért kevésbé részletezzük.

Vizing-tétel. Ha G egyszerű gráf, akkor $\chi_e(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Élszám szerinti indukcióval bizonyítunk. Legyen $e = uv_0 \in E(G)$ tetszőleges. Mivel $\Delta(G - e) \leq \Delta$, ezért az indukciós feltétel szerint az e élt színezetlenül hagyva, G többi élét jól tudjuk színezni $\Delta + 1$ méretű palettával dolgozva. A palettaméret miatt most G **összes** csúcsához található szabad szín (u -hoz és v_0 -hoz legalább kettő is).

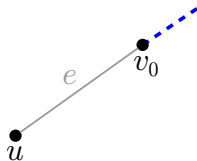
Vizing-tétel. Ha G egyszerű gráf, akkor $\chi_e(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Élszám szerinti indukcióval bizonyítunk. Legyen $e = uv_0 \in E(G)$ tetszőleges. Mivel $\Delta(G - e) \leq \Delta$, ezért az indukciós feltétel szerint az e élt színezetlenül hagyva, G többi éleit jól tudjuk színezni $\Delta + 1$ méretű palettával dolgozva. A palettaméret miatt most G **összes** csúcsához található szabad szín (u -hoz és v_0 -hoz legalább kettő is).

A **triviális eset** megint az, ha van olyan szín a palettában, amely u és v_0 körül is szabad: Ekkor ezt a színt kaphatja e , és így G -t jól élszínezzük legfeljebb $\Delta + 1$ szín felhasználásával. A továbbiakban feltesszük, hogy nem ez a helyzet.

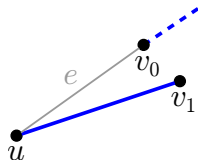


(a szürke él színezetlen)



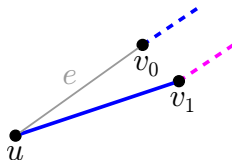
Legyen c_0 egy szabad szín v_0 körül (ami használt u körül, mert a nemtriviális esetben vagyunk). Legyen az u -ból induló c_0 színű él végpontja v_1 .

(a szürke él színezetlen)



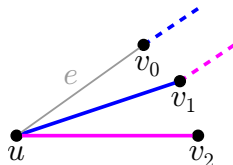
Legyen c_0 egy szabad szín v_0 körül (ami használt u körül, mert a nemtriviális esetben vagyunk). Legyen az u -ból induló c_0 színű él végpontja v_1 . Hasonlóan definiáljuk a $v_2, v_3, \dots$ csúcsokat: v_k körül választunk egy tetszőleges c_k szabad színt. Ha a c_k nem szabad u körül, ÉS c_k nincs felhasználva az $uv_1, \dots, uv_k$ éleken, akkor legyen v_{k+1} az a szomszédja u -nak, amelyre az uv_{k+1} él színe c_k .

(a szürke él színezetlen)



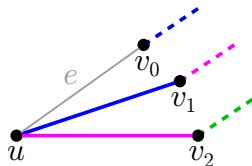
Legyen c_0 egy szabad szín v_0 körül (ami használt u körül, mert a nemtriviális esetben vagyunk). Legyen az u -ból induló c_0 színű él végpontja v_1 . Hasonlóan definiáljuk a $v_2, v_3, \dots$ csúcsokat: v_k körül választunk egy tetszőleges c_k szabad színt. Ha a c_k nem szabad u körül, ÉS c_k nincs felhasználva az $uv_1, \dots, uv_k$ éleken, akkor legyen v_{k+1} az a szomszédja u -nak, amelyre az uv_{k+1} él színe c_k .

(a szürke él színezetlen)



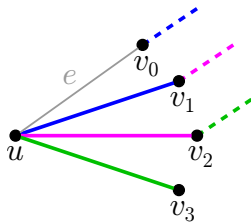
Legyen c_0 egy szabad szín v_0 körül (ami használt u körül, mert a nemtriviális esetben vagyunk). Legyen az u -ból induló c_0 színű él végpontja v_1 . Hasonlóan definiáljuk a $v_2, v_3, \dots$ csúcsokat: v_k körül választunk egy tetszőleges c_k szabad színt. Ha a c_k nem szabad u körül, ÉS c_k nincs felhasználva az $uv_1, \dots, uv_k$ éleken, akkor legyen v_{k+1} az a szomszédja u -nak, amelyre az uv_{k+1} él színe c_k .

(a szürke él színezetlen)



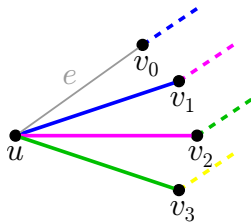
Legyen c_0 egy szabad szín v_0 körül (ami használt u körül, mert a nemtriviális esetben vagyunk). Legyen az u -ból induló c_0 színű él végpontja v_1 . Hasonlóan definiáljuk a $v_2, v_3, \dots$ csúcsokat: v_k körül választunk egy tetszőleges c_k szabad színt. Ha a c_k nem szabad u körül, ÉS c_k nincs felhasználva az $uv_1, \dots, uv_k$ éleken, akkor legyen v_{k+1} az a szomszédja u -nak, amelyre az uv_{k+1} él színe c_k .

(a szürke él színezetlen)



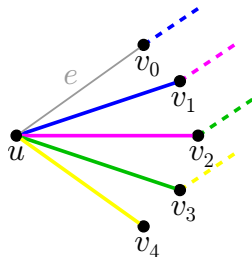
Legyen c_0 egy szabad szín v_0 körül (ami használt u körül, mert a nemtriviális esetben vagyunk). Legyen az u -ból induló c_0 színű él végpontja v_1 . Hasonlóan definiáljuk a $v_2, v_3, \dots$ csúcsokat: v_k körül választunk egy tetszőleges c_k szabad színt. Ha a c_k nem szabad u körül, ÉS c_k nincs felhasználva az $uv_1, \dots, uv_k$ éleken, akkor legyen v_{k+1} az a szomszédja u -nak, amelyre az uv_{k+1} él színe c_k .

(a szürke él színezetlen)



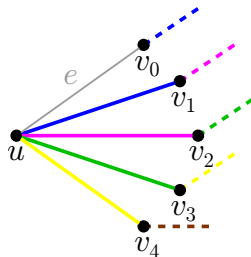
Legyen c_0 egy szabad szín v_0 körül (ami használt u körül, mert a nemtriviális esetben vagyunk). Legyen az u -ból induló c_0 színű él végpontja v_1 . Hasonlóan definiáljuk a $v_2, v_3, \dots$ csúcsokat: v_k körül választunk egy tetszőleges c_k szabad színt. Ha a c_k nem szabad u körül, ÉS c_k nincs felhasználva az $uv_1, \dots, uv_k$ éleken, akkor legyen v_{k+1} az a szomszédja u -nak, amelyre az uv_{k+1} él színe c_k .

(a szürke él színezetlen)



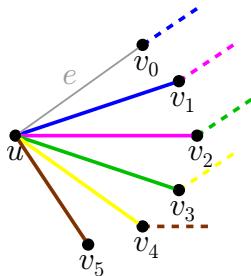
Legyen c_0 egy szabad szín v_0 körül (ami használt u körül, mert a nemtriviális esetben vagyunk). Legyen az u -ból induló c_0 színű él végpontja v_1 . Hasonlóan definiáljuk a $v_2, v_3, \dots$ csúcsokat: v_k körül választunk egy tetszőleges c_k szabad színt. Ha a c_k nem szabad u körül, ÉS c_k nincs felhasználva az $uv_1, \dots, uv_k$ éleken, akkor legyen v_{k+1} az a szomszédja u -nak, amelyre az uv_{k+1} él színe c_k .

(a szürke él színezetlen)



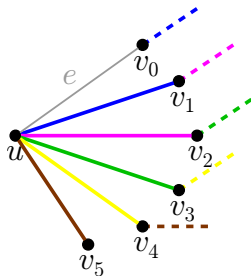
Legyen c_0 egy szabad szín v_0 körül (ami használt u körül, mert a nemtriviális esetben vagyunk). Legyen az u -ból induló c_0 színű él végpontja v_1 . Hasonlóan definiáljuk a $v_2, v_3, \dots$ csúcsokat: v_k körül választunk egy tetszőleges c_k szabad színt. Ha a c_k nem szabad u körül, ÉS c_k nincs felhasználva az $uv_1, \dots, uv_k$ éleken, akkor legyen v_{k+1} az a szomszédja u -nak, amelyre az uv_{k+1} él színe c_k .

(a szürke él színezetlen)



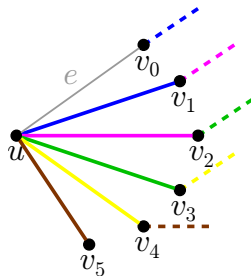
Legyen c_0 egy szabad szín v_0 körül (ami használt u körül, mert a nemtriviális esetben vagyunk). Legyen az u -ból induló c_0 színű él végpontja v_1 . Hasonlóan definiáljuk a $v_2, v_3, \dots$ csúcsokat: v_k körül választunk egy tetszőleges c_k szabad színt. Ha a c_k nem szabad u körül, ÉS c_k nincs felhasználva az $uv_1, \dots, uv_k$ éleken, akkor legyen v_{k+1} az a szomszédja u -nak, amelyre az uv_{k+1} él színe c_k .

(a szürke él színezetlen)



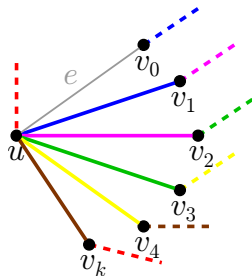
Legyen c_0 egy szabad szín v_0 körül (ami használt u körül, mert a nemtriviális esetben vagyunk). Legyen az u -ból induló c_0 színű él végpontja v_1 . Hasonlóan definiáljuk a $v_2, v_3, \dots$ csúcsokat: v_k körül választunk egy tetszőleges c_k szabad színt. Ha a c_k nem szabad u körül, ÉS c_k nincs felhasználva az $uv_1, \dots, uv_k$ éleken, akkor legyen v_{k+1} az a szomszédja u -nak, amelyre az uv_{k+1} él színe c_k . Ott használjuk G egyszerűségét, hogy a v_k csúcsok mind különbözők.

(a szürke él színezetlen)



A folyamat nyilván véget ér egyszer (mert véges sok csúcs van).
Két eset lehetséges:

(a szürke él színezetlen)

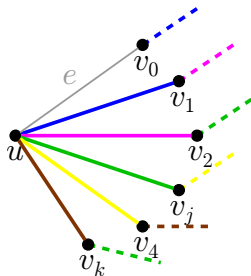


A folyamat nyilván véget ér egyszer (mert véges sok csúcs van).

Két eset lehetséges:

1. eset: Az aktuális v_k csúcsnál fellépő c_k szabad szín u -nál is szabad.

(a szürke él színezetlen)

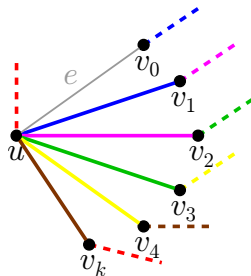


A folyamat nyilván véget ér egyszer (mert véges sok csúcs van).

Két eset lehetséges:

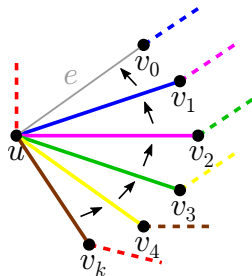
1. eset: Az aktuális v_k csúcsnál fellépő c_k szabad szín u -nál is szabad.
2. eset: Az aktuális v_k csúcsnál fellépő c_k szabad szín már megjelent korábban valamelyik uv_j élen ($0 < j < k$).

(a szürke él színezetlen)



1. eset: Az aktuális v_k csúcsnál fellépő c_k szabad szín u -nál is szabad.

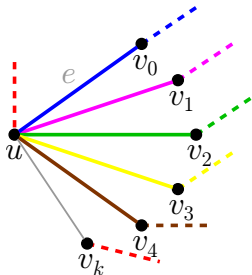
(a szürke él színezetlen)



1. eset: Az aktuális v_k csúcsnál fellépő c_k szabad szín u -nál is szabad.

Ekkor az uv_i éleket c_i -re színezve ($i = 0, \dots, k$) egy jó élszínezést kapjuk G -nek. Ezzel az 1. esettel végeztünk, nem léptünk ki a $\Delta + 1$ méretű palettából.

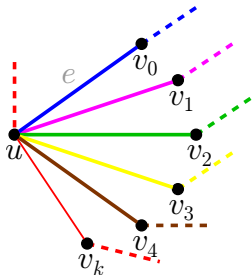
(a szürke él színezetlen)



1. eset: Az aktuális v_k csúcsnál fellépő c_k szabad szín u -nál is szabad.

Ekkor az uv_i éleket c_i -re színezve ($i = 0, \dots, k$) egy jó élszínezést kapjuk G -nek. Ezzel az 1. esettel végeztünk, nem léptünk ki a $\Delta + 1$ méretű palettából.

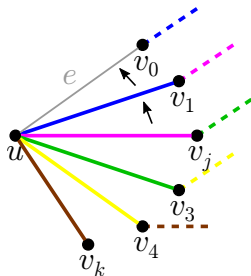
(a szürke él színezetlen)



1. eset: Az aktuális v_k csúcsnál fellépő c_k szabad szín u -nál is szabad.

Ekkor az uv_i éleket c_i -re színezve ($i = 0, \dots, k$) egy jó élszínezést kapjuk G -nek. Ezzel az 1. esettel végeztünk, nem léptünk ki a $\Delta + 1$ méretű palettából.

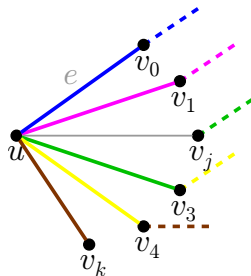
(a szürke él színezetlen)



A 2. esetben használni fogjuk a következőt:

Ha nem az összes uv_i él színét „mozgatjuk feljebb”, mint előbb, hanem csak az első j színt, akkor is egy (parciális) jó élszínezést kapunk, ahol az uv_j él lesz színezetlen. (Lásd ábra.)

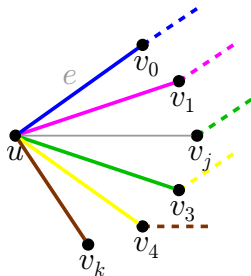
(a szürke él színezetlen)



A 2. esetben használni fogjuk a következőt:

Ha nem az összes uv_i él színét „mozgatjuk feljebb”, mint előbb, hanem csak az első j színt, akkor is egy (parciális) jó élszínezést kapunk, ahol az uv_j él lesz színezetlen. (Lásd ábra.)

(a szürke él színezetlen)

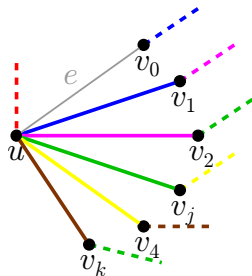


A 2. esetben használni fogjuk a következőt:

Ha nem az összes uv_i él színét „mozgatjuk feljebb”, mint előbb, hanem csak az első j színt, akkor is egy (parciális) jó élszínezést kapunk, ahol az uv_j él lesz színezetlen. (Lásd ábra.)

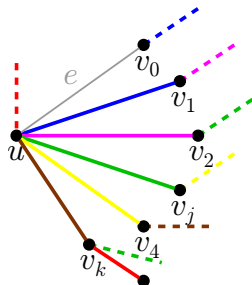
Erre az átszínezésre úgy fogunk hivatkozni, hogy „szétnyitjuk a legyezőt úgy, hogy az uv_j él legyen színezetlen”. Megjegyezzük, hogy ezzel a módszerrel bármelyik uv_j élt színezetlenné tehetjük a jóság megtartásával ($0 \leq j \leq k$).

(a szürke él színezetlen)



2. eset: Az aktuális v_k csúcsnál fellépő c_k szabad szín már megjelent korábban valamelyik uv_j élen ($j < k$). Ekkor tekintsünk egy c szabad színt v körül. Ha c szabad szín lenne v_k körül is, akkor lényegében visszajutnánk az előző esethez, így feltesszük, hogy van v_k -ra illeszkedő c színű él.

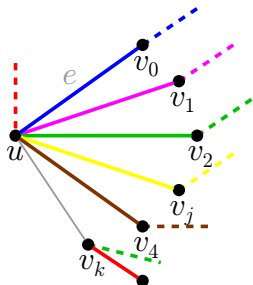
(a szürke él színezetlen)



2. eset: Az aktuális v_k csúcsnál fellépő c_k szabad szín már megjelent korábban valamelyik uv_j élen ($j < k$). Ekkor tekintsünk egy c szabad színt v körül. Ha c szabad szín lenne v_k körül is, akkor lényegében visszajutnánk az előző esethez, így feltesszük, hogy van v_k -ra illeszkedő c színű él.

Hajtsuk végre most is az előző esetnél látott „legyezést” (lásd ábra) úgy, hogy az uv_k maradjon színezetlen. Ezzel egy (parciális) jó élszínezést kapunk.

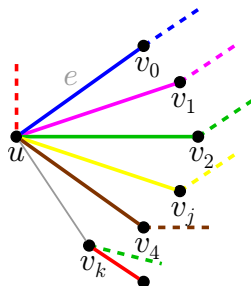
(a szürke él színezetlen)



2. eset: Az aktuális v_k csúcsnál fellépő c_k szabad szín már megjelent korábban valamelyik uv_j élen ($j < k$). Ekkor tekintsünk egy c szabad színt v körül. Ha c szabad szín lenne v_k körül is, akkor lényegében visszajutnánk az előző esethez, így feltesszük, hogy van v_k -ra illeszkedő c színű él.

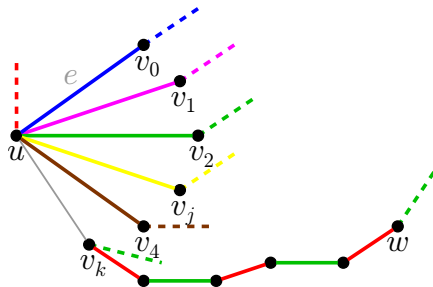
Hajtsuk végre most is az előző esetnél látott „legyezést” (lásd ábra) úgy, hogy az uv_k maradjon színezetlen. Ezzel egy (parciális) jó élszínezést kapunk.

(a szürke él színezetlen)



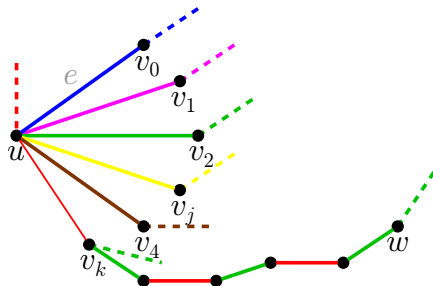
Próbáljuk meg szabaddá tenni a v_k csúcsnál is a c színt (a c_k helyett) Kempe-átszínezéssel.

(a szürke él színezetlen)



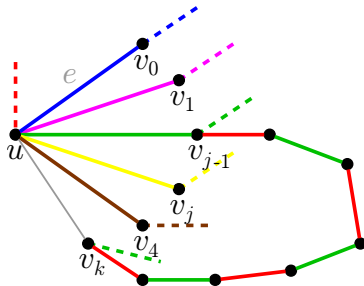
Próbáljuk meg szabaddá tenni a v_k csúcsnál is a c színt (a c_k helyett) Kempe-átszínezéssel. Ha a v_k -ból induló c - c_k Kempe-út w végpontja nem u , akkor a páros gráfoknál látott befejezés működik: színcsere a Kempe-úton + az uv_k él c színűre színezése.

(a szürke él színezetlen)



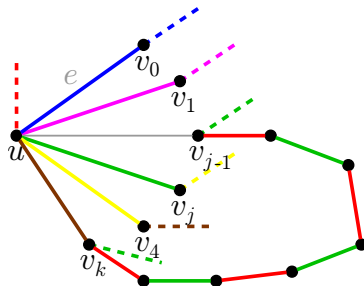
Próbáljuk meg szabaddá tenni a v_k csúcsnál is a c színt (a c_k helyett) Kempe-átszínezéssel. Ha a v_k -ból induló c - c_k Kempe-út w végpontja nem u , akkor a páros gráfoknál látott befejezés működik: színcsere a Kempe-úton + az uv_k él c színűre színezése.

(a szürke él színezetlen)



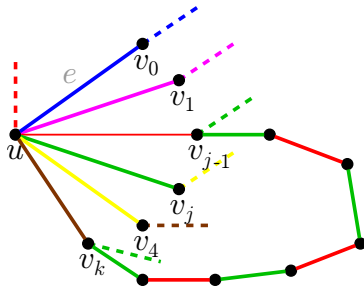
Próbáljuk meg szabaddá tenni a v_k csúcsnál is a c színt (a c_k helyett) Kempe-átszínezéssel. Ha a v_k -ból induló c - c_k Kempe-út w végpontja nem u , akkor a páros gráfoknál látott befejezés működik: színcsere a Kempe-úton + az uv_k él c színűre színezése. Ha $w = u$, akkor a Kempe-út az uv_{j-1} élen keresztül ér be u -ba. (Csak ez az egy c/c_k színű él illeszkedik u -ra.)

(a szürke él színezetlen)



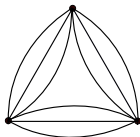
Próbáljuk meg szabaddá tenni a v_k csúcsnál is a c színt (a c_k helyett) Kempe-átszínezéssel. Ha a v_k -ból induló c - c_k Kempe-út w végpontja nem u , akkor a páros gráfoknál látott befejezés működik: színcsere a Kempe-úton + az uv_k él c színűre színezése. Ha $w = u$, akkor a Kempe-út az uv_{j-1} élen keresztül ér be u -ba. „Nyissuk szét a legyezőt” úgy, hogy uv_{j-1} legyen színezetlen. A v_{j-1} -ból induló c - c_k Kempe-út végpontja v_k (miért?), nem u , így a Kempe-átszínezés után az uv_{j-1} élre kiosztható a c szín.

(a szürke él színezetlen)



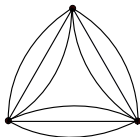
Próbáljuk meg szabaddá tenni a v_k csúcsnál is a c színt (a c_k helyett) Kempe-átszínezéssel. Ha a v_k -ból induló c - c_k Kempe-út w végpontja nem u , akkor a páros gráfoknál látott befejezés működik: színcsere a Kempe-úton + az uv_k él c színűre színezése. Ha $w = u$, akkor a Kempe-út az uv_{j-1} élen keresztül ér be u -ba. „Nyissuk szét a legyezőt” úgy, hogy uv_{j-1} legyen színezetlen. A v_{j-1} -ból induló c - c_k Kempe-út végpontja v_k (miért?), nem u , így a Kempe-átszínezés után az uv_{j-1} élre kiosztható a c szín. $\square$

Ha párhuzamos éleket is megengedünk, akkor az élkromatikus szám lehet $(\Delta+1)$ -nél nagyobb is. Például tekintsünk egy háromszöget, amelynek minden élét lecseréltük k párhuzamos élre:



A kapott G gráfban minden pont foka $2k$, így $\Delta(G) = 2k$. A gráfnak $3k$ éle van, és bármely két élnek van közös végpontja, így csupa különböző színt kell kapniuk minden jó élszínezésnél, amiből $\chi_e(G) = 3k = \frac{3}{2}\Delta(G)$ adódik.

Ha párhuzamos éleket is megengedünk, akkor az élkromatikus szám lehet $(\Delta+1)$ -nél nagyobb is. Például tekintsünk egy háromszöget, amelynek minden élét lecseréltük k párhuzamos élre:



A kapott G gráfban minden pont foka $2k$, így $\Delta(G) = 2k$. A gráfnak $3k$ éle van, és bármely két élnek van közös végpontja, így csupa különböző színt kell kapniuk minden jó élszínezésnél, amiből $\chi_e(G) = 3k = \frac{3}{2}\Delta(G)$ adódik. Ennél nagyobb azonban már nem lehet az élkromatikus szám adott Δ esetén:

Shannon-tétel. Tetszőleges (hurokélmentes) G gráfra

$$\chi_e(G) \leq \frac{3}{2}\Delta(G).$$