7. LEGKISEBB NÉGYZETEK ELVE, QR-FELBONTÁS

1. Illesszünk (L_2-normában) legjobban közelítő egyenest az $(1,2)$, $(4,3)$ és $(5,7)$ pontokra.

2. Illesszünk (L_2-normában) legjobban közelítő egyenest a $(2,1)$, $(5,2)$, $(7,3)$ és $(8,3)$ pontokra.

3. Illesszünk (L_2-normában) legjobban közelítő egyenest a $(0,-1)$, $(1,1)$, $(2,3)$, $(2,4)$ és $(3,6)$ pontokra.

4. Illesszünk (L_2-normában) legjobban közelítő, $y = ax^2 + bx + c$ egyenletű parabolát a $(-2,0)$, $(0,-2)$, $(2,-1)$ és $(4,2)$ pontokra.

5. Minimalizáljuk az $x^2 + y^2$ összeget, ha $3x - 4y = 5$. Fogalmazzuk meg geometriai nyelven a feladatot!

6. Minimalizáljuk az $x^2 + y^2$ összeget, ha $5x - 3y = 15$.

7. Minimalizáljuk az $x^2 + y^2 + z^2$ összeget, ha $x - 4y - 2z = 21$.

8. Keressük meg azt a minimális normájú (x_1, x_2, x_3) vektort, amelyre

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

9. Adjunk meg két egymásra merőleges egységvektort, amelyek ugyanazt a síkot feszítik, mint az $(1,2,3)$ és $(1,0,-1)$ vektorok!

10. Határozzuk meg a következő mátrixok QR-felbontását:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 10 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

11. Határozzuk meg a következő mátrixok QR-felbontását:

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 4 & -8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 9 & 0 & 26 \\ 12 & 0 & -7 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

12. Az előző feladatban kiszámolt QR-felbontás segítségével minimalizáljuk az $||A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}||^2$ mennyiséget ($\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$), ahol

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 4 & -8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Házi feladat.

13. Keressük meg azt a minimális normájú (x_1, x_2, x_3, x_4) vektort, amelyre

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \quad + \quad x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = -3 \end{cases}$$

Megoldások

1. A keresett egyenes egyenlete: $y = \dfrac{27}{26}x + \dfrac{7}{13}$, azaz $y \approx 1{,}0385x + 0{,}5385$.

2. A keresett egyenes egyenlete: $y = \dfrac{5}{14}x + \dfrac{2}{7}$.

3. A keresett egyenes egyenlete: $y = \dfrac{61}{26}x - \dfrac{15}{13}$.

4. A keresett parabola egyenlete: $y = \dfrac{5}{16}x^2 - \dfrac{11}{40}x - \dfrac{37}{20}$.

5. Az $x^2 + y^2$ összeg $x = \frac{3}{5}$, $y = -\frac{4}{5}$ esetén minimális. (Ekkor az összeg értéke 1.) Tehát a $3x-4y = 5$ egyenletű egyenesen a $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ pont van a legközelebb az origóhoz, így az egyenes távolsága az origótól $\sqrt{1} = 1$.

6. Az $x^2 + y^2$ összeg $x = \frac{75}{34}$, $y = -\frac{45}{34}$ esetén minimális. (Ekkor az összeg értéke $\frac{225}{34}$.)

7. Az $x^2 + y^2 + z^2$ összeg $x = 1$, $y = -4$, $z = -2$ esetén minimális. (Ekkor az értéke 21.)

8. $(\frac{8}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{7}{3})$.

9. Több jó megoldás is van (végtelen sok). Gram–Schmidt-ortogonalizációval a következő két vektort kapjuk: $(\frac{1}{\sqrt{17}}, \frac{2}{\sqrt{17}}, \frac{3}{\sqrt{17}})$, $(\frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{1}{\sqrt{21}}, -\frac{2}{\sqrt{21}})$.

10.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

11.

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 4 & -8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 \\ 4/5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 26 \\ 12 & 0 & -7 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & 4/5 \\ 4/5 & 0 & -3/5 \\ 0 & 4/5 & 0 \\ 0 & -3/5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 & 0 & 10 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$$

12. Az $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ vektor esetén lesz minimális $||A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}||^2$ értéke.