6. LINEÁRIS PROGRAMOZÁS

1. Egy bútorgyártó üzem kétfajta terméket gyárt: széket és asztalt. Tegyük fel, hogy minden legyártott szék után 40 dollár haszon, és minden legyártott asztal után 50 dollár haszon keletkezik. Egy szék legyártásához 2 óra élőmunka, 3 óra géppark-használat és 1 egység fa erőforrások szükségesek. Egy asztal legyártásához pedig 2 óra élőmunka, 1 óra géppark-használat és 4 egység fa kell. Minden nap összesen 60 óra élőmunka, 75 óra géppark-idő és 84 egység fa áll a gyár rendelkezésére.

Mennyit gyártsanak az egyes termékekből naponta, ha a haszon maximalizálása a cél? Írjuk fel a megfelelő LP-feladatot!

2. Egy takarmányüzemben kukoricadarából és hallisztből készítenek takarmánykeveréket. Minden csomagnak legalább 120 egység proteint és 80 egység kalciumot kell tartalmaznia előírás szerint. A kukoricadara kilónként 10 egység proteint és 5 egység kalciumot tartalmaz, a halliszt pedig 2 egység proteint és 5 egység kalciumot kilónként.

Ha 1 kg kukoricadara 8 forintba, 1 kg halliszt pedig 4 forintba kerül, akkor melyik összetevőből mennyit tegyenek egy csomagba, ha minimalizálni szeretnék a gyártási költségeket? Írjuk fel a megfelelő LP-feladatot!

3. Egy autógyár két raktárat (A-t és B-t), valamint 3 autószalont tart fenn az országban. Az A raktárban most 40 autó, a B raktárban pedig 20 autó van. (Az autók egyformák.) Az 1., 2. és 3. autószalon rendre 25, 10 és 22 autó leszállítását kérte a raktárkészletből. A szállítási költségek a következők (ahol például C_{A1} azt jelöli, hogy egy autó elszállítása hány egységbe kerül az A raktárból az 1. szalonba):

$$C_{A1} = 550, \quad C_{A2} = 300, \quad C_{A3} = 400, \quad C_{B1} = 350, \quad C_{B2} = 300, \quad C_{B3} = 100.$$

Feladatunk olyan szállítási rend megtervezése, amellyel minimalizáljuk a szállítási költségeket. Relaxáljuk a problémát és fogalmazzuk meg LP-feladatként!

4. Adottak az $(1,1)$, $(2,3)$, $(3,2)$, $(4,3)$ és $(5,4)$ pontok a síkon.
 a) Határozzuk meg az L_∞-normában legjobban illeszkedő egyenest!
 b) Határozzuk meg az L_1-normában legjobban illeszkedő egyenest!

5. Grafikus módszerrel oldjuk meg a következő lineáris programozási feladatot:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 20 \\ x_1 \le 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$
$$6x_1 + 2x_2 \to \max$$

6. Grafikus módszerrel oldjuk meg a következő lineáris programozási feladatot:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 20 \\ x_1 \le 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$
$$2x_1 + 6x_2 \to \min$$

7. Grafikus módszerrel oldjuk meg a következő lineáris programozási feladatot:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 20 \\ x_1 \le 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$
$$5x_1 + 3x_2 \to \max$$

8. Grafikus módszerrel oldjuk meg a következő lineáris programozási feladatot:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 25 \\ x_1 + 3x_2 \leq 33 \\ x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$3x_1 + 5x_2 \to \max$$

9. Grafikus módszerrel oldjuk meg a következő lineáris programozási feladatot:

$$\begin{cases} 8x_1 + 8x_2 \leq 64 \\ x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ 3x_1 \leq 18 \\ 2x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$5x_1 + 3x_2 \to \max$$

10. Szimplex módszerrel oldjuk meg a következő lineáris programozási feladatot:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 \leq 40 \\ -x_2 + x_3 \leq 10 \\ x_1 + x_2 - x_3 \leq 18 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$4x_1 + 3x_3 \to \max$$

11. Szimplex módszerrel oldjuk meg a következő lineáris programozási feladatot:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 60 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ x_1 + x_2 - x_3 \leq 20 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 \to \max$$

12. Szimplex módszerrel oldjuk meg a következő lineáris programozási feladatot:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$2x_1 + x_2 \to \max$$

13. Szimplex módszerrel oldjuk meg a következő lineáris programozási feladatot:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 \leq 100 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 80 \\ x_1 + x_3 + x_4 \leq 50 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 \to \max$$

Megoldások

1. A naponta legyártott székek és asztalok számát rendre s és a változókkal jelölve, a következő LP-feladatot kell megoldani:

$$\begin{cases} 2s + 2a \le 60 \\ 3s + a \le 75 \\ s + 4a \le 84 \\ s, a \ge 0 \end{cases}$$
$$40s + 50a \to \max$$

2. Ha a csomag kukoricadara és halliszt tartalmát (kg-ban mérve) rendre k és h változókkal jelöljük, a következő LP-feladatot kell megoldani:

$$\begin{cases} 10k + 2h \ge 120 \\ 5k + 5h \ge 80 \\ k, h \ge 0 \end{cases}$$
$$8k + 4h \to \min$$

3. Ha az A raktárból az 1. szalonba szállított autók számát az X_{A1} változóval jelöljük, és analóg módon vezetjük be az X_{A2}, X_{A3}, X_{B1}, X_{B2}, X_{B3} változókat, valamint eltekintünk attól a feltételtől, hogy ezek a változók csak egész értékeket vehetnek fel (ez a relaxáció), akkor a következő LP-feladatot kell megoldani:

$$\begin{cases} X_{A1} + X_{B1} = 25 \\ X_{A2} + X_{B2} = 10 \\ X_{A3} + X_{B3} = 22 \\ X_{A1} + X_{A2} + X_{A3} \le 40 \\ X_{B1} + X_{B2} + X_{B3} \le 20 \\ X_{A1}, X_{A2}, X_{A3}, X_{B1}, X_{B2}, X_{B3} \ge 0 \end{cases}$$
$$550X_{A1} + 300X_{A2} + 400X_{A3} + 350X_{B1} + 300X_{B2} + 100X_{B3} \to \min$$

4. a) $y = 0{,}5x + 1{,}25$
b) $y = 0{,}75x + 0{,}25$

5. A célfüggvény maximuma 80, melyet az $x_1 = 10$, $x_2 = 10$ helyen vesz fel.

6. A célfüggvény minimuma 0, melyet az $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ helyen vesz fel.

7. A célfüggvény maximuma 80, melyet az $x_1 = 10$, $x_2 = 10$ helyen vesz fel.

8. A célfüggvény maximuma 70, melyet az $x_1 = 15$, $x_2 = 5$ helyen vesz fel.

9. A célfüggvény maximuma 36, melyet az $x_1 = 6$, $x_2 = 2$ helyen vesz fel.

10. A célfüggvény maximuma 148, melyet az $x_1 = 28$, $x_2 = 2$, $x_3 = 12$ helyen vesz fel.

11. A célfüggvény maximuma 25, melyet az $x_1 = 15$, $x_2 = 5$, $x_3 = 0$ helyen vesz fel.

12. A célfüggvény felülről nem korlátos a megadott tartományon, azaz tetszőlegesen nagy értéket felvehet, nincs maximuma.

13. A célfüggvény maximuma 230, melyet az $x_1 = 20$, $x_2 = 0$, $x_3 = 30$, $x_4 = 0$, $x_5 = 50$ helyen vesz fel.