

Rekurziók

(Fibonacci-számok és Catalan-számok)

Algebrai és geometriai módszerek a kombinatorikában

3. előadás

SZTE Bolyai Intézet
Szeged, 2018.

Minden $n \in \mathbb{N}$ -re adott egy

$$a_n = \text{KIF}_n(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$$

alakú feltétel, ahol KIF_n egy olyan „kifejezés” ($\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fgv.), amely az $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ értékekből kiszámol egy számot.

„Egy elem definíciójánál hivatkozhatunk korábbi sorozatelemekre.”

Példák ilyen feltételekre:

$$a_{100} = a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_{99}^2.$$

$$a_{48} = 3a_{15}a_{22}a_{40} - \sqrt{2}a_{47} + 13.$$

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}. \quad (\text{itt } n \geq 2)$$

$$a_n = \text{„az } n\text{-edik tizedesjegye sin } a_{n-1}\text{-nek”}. \quad (\text{itt } n \geq 1)$$

Minden $n \in \mathbb{N}$ -re adott egy

$$a_n = \text{KIF}_n(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$$

alakú feltétel, ahol KIF_n egy olyan „kifejezés” ($\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fgv.), amely az $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ értékekből kiszámol egy számot.

„Egy elem definíciójánál hivatkozhatunk korábbi sorozatelemekre.”

Példák ilyen feltételekre:

$$a_{100} = a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_{99}^2.$$

$$a_{48} = 3a_{15}a_{22}a_{40} - \sqrt{2}a_{47} + 13.$$

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}. \quad (\text{itt } n \geq 2)$$

$$a_n = \text{„az } n\text{-edik tizedesjegye sin } a_{n-1}\text{-nek”}. \quad (\text{itt } n \geq 1)$$

A jobb oldalnak nem kell az összes $a_0, \dots, a_{n-1}$ elemtől ténylegesen függnie („úgy is függhet, hogy nem függ”). Sőt, pl. az $a_7 = 100$ feltétel is megengedett, ami egyáltalán nem „hivatkozik” más elemekre. (Az a_0 elemhez tartozó feltétel mindig ilyen.)

Minden $n \in \mathbb{N}$ -re adott egy

$$a_n = \text{KIF}_n(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$$

alakú feltétel, ahol KIF_n egy olyan „kifejezés” ($\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fgv.), amely az $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ értékekből kiszámol egy számot.

(Egy ilyen feltételrendszert **rekurzió**nak nevezünk.) Könnyű látni, hogy pontosan egy $(a_n)_{n=0}^\infty$ sorozat teljesíti az összes feltételt: Az $a_0, a_1, a_2, \dots$ sorozatelemeket egyértelműen meghatározzák a hozzájuk tartozó feltételek, ha ebben a sorrendben haladva „olvassuk el őket”.

Például legyen a feltételrendszer a következő:

$$a_0 = 1;$$

$$a_n = a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_{n-1}^2, \text{ ha } n \geq 1.$$

Világos, hogy ezt egyetlen sorozat elégíti ki:

$$1, 1, 2, 6, 42, 1806, \dots$$

Minden $n \in \mathbb{N}$ -re adott egy

$$a_n = \text{KIF}_n(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$$

alakú feltétel, ahol KIF_n egy olyan „kifejezés” ($\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fgv.), amely az $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ értékekből kiszámol egy számot.

(Egy ilyen feltételrendszert **rekurzió**nak nevezünk.) Könnyű látni, hogy pontosan egy $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozat teljesíti az összes feltételt: Az $a_0, a_1, a_2, \dots$ sorozatelemeket egyértelműen meghatározzák a hozzájuk tartozó feltételek, ha ebben a sorrendben haladva „olvassuk el őket”.

Az így kapott $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozatot a fenti **rekurzióval definiált sorozatnak** szokás nevezni.

Ha egy összeszámlálási probléma visszavezethető ugyanezen probléma „kisebb méretű” (paraméterű) változatainak megoldására, akkor ez a visszavezetés egy rekurzív összefüggést ad a különböző méretekhez tartozó válaszok között.

Ha egy összeszámlálási probléma visszavezethető ugyanezen probléma „kisebb méretű” (paraméterű) változatainak megoldására, akkor ez a visszavezetés egy rekurzív összefüggést ad a különböző méretekhez tartozó válaszok között.

Láttunk már ilyet:

1. példa: Ha s_n jelöli az $[n]$ halmaz sorbaállításainak számát, akkor $s_n = ns_{n-1}$ (ha $n \geq 2$). (Az ' n ' elem helyének megválasztása után a probléma „kisebb méretű” változatát kell megoldani: hogy az $[n-1]$ halmaznak hány sorbaállítása van.) Ez a rekurzív összefüggés (plusz $s_1 = 1$) az $s_n = n!$ sorozatot definiálja.

Ha egy összeszámlálási probléma visszavezethető ugyanezen probléma „kisebb méretű” (paraméterű) változatainak megoldására, akkor ez a visszavezetés egy rekurzív összefüggést ad a különböző méretekhez tartozó válaszok között.

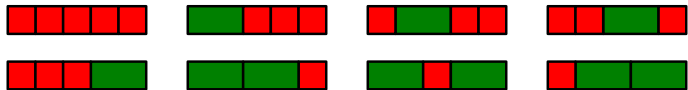
Láttunk már ilyet:

1. példa: Ha s_n jelöli az $[n]$ halmaz sorbaállításainak számát, akkor $s_n = ns_{n-1}$ (ha $n \geq 2$). (Az ' n ' elem helyének megválasztása után a probléma „kisebb méretű” változatát kell megoldani: hogy az $[n-1]$ halmaznak hány sorbaállítása van.) Ez a rekurzív összefüggés (plusz $s_1 = 1$) az $s_n = n!$ sorozatot definiálja.

Megjegyzés. Több paraméter esetén az ilyen visszavezetések többparaméteres rekurziókhoz vezetnek (nem nehéz kitalálni, h. ez mit jelent, csak azt kell tisztázni, hogy mit értünk korábbi elemeken): Lásd pl. rekurzió az $i(n, k)$ számokra.

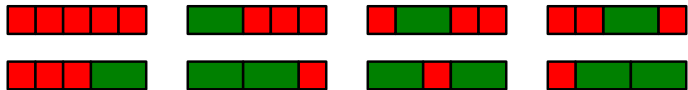
2. példa: Hányféleképpen lehet leparkettázni egy $1 \times n$ -es téglalapot 1×1 -es négyzetekkel és 1×2 -es dominókkal?

Például $n = 5$ esetén 8 ilyen parkettázás van:

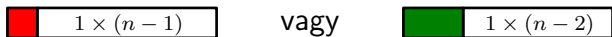


2. példa: Hányféleképpen lehet leparkettázni egy $1 \times n$ -es téglalapot 1×1 -es négyzetekkel és 1×2 -es dominókkal?

Például $n = 5$ esetén 8 ilyen parkettázás van:

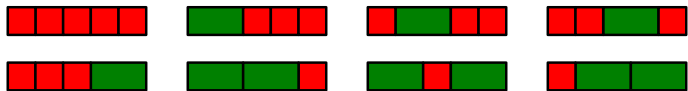


Megoldás. Ha a téglalapunk bal szélére egy 1×1 -es négyzetet teszünk, akkor utána még egy $1 \times (n - 1)$ -es téglalapot kell leparkettázni a feladatbeli parkettákkal. Ha pedig a téglalapunk bal szélére egy 1×2 -es dominót teszünk, akkor utána még egy $1 \times (n - 2)$ -es téglalapot kell leparkettázni:

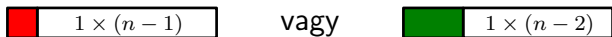


2. példa: Hányféleképpen lehet leparkettázni egy $1 \times n$ -es téglalapot 1×1 -es négyzetekkel és 1×2 -es dominókkal?

Például $n = 5$ esetén 8 ilyen parkettázás van:



Megoldás. Ha a téglalapunk bal szélére egy 1×1 -es négyzetet teszünk, akkor utána még egy $1 \times (n - 1)$ -es téglalapot kell leparkettázni a feladatbeli parkettákkal. Ha pedig a téglalapunk bal szélére egy 1×2 -es dominót teszünk, akkor utána még egy $1 \times (n - 2)$ -es téglalapot kell leparkettázni:



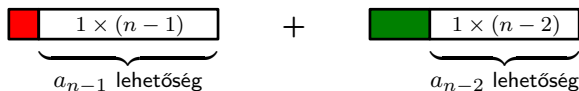
Tehát ha tudjuk, hogy az $1 \times (n - 1)$ -es és $1 \times (n - 2)$ -es téglalapokat hányféleképpen lehet leparkettázni, akkor egyszerű megválaszolni a kérdést az $1 \times n$ -es téglalapra is.

2. példa: Hányféleképpen lehet leparkettázni egy $1 \times n$ -es téglalapot 1×1 -es négyzetekkel és 1×2 -es dominókkal?

Megoldás. Ha a_n jelöli a feladatra adott választ, akkor

$$(*) \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (\text{ha } n \geq 2),$$

mert a_{n-1} az $1 \times n$ -es téglalap azon parkettázásainak száma, amelyek 1×1 -es parkettával kezdődnek; a_{n-2} pedig azon parkettázások száma, amelyek 1×2 -es parkettával kezdődnek:

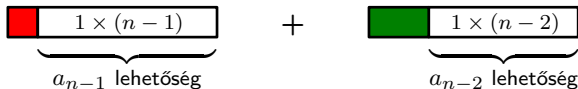


2. példa: Hányféleképpen lehet leparkettázni egy $1 \times n$ -es téglalapot 1×1 -es négyzetekkel és 1×2 -es dominókkal?

Megoldás. Ha a_n jelöli a feladatra adott választ, akkor

$$(*) \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (\text{ha } n \geq 2),$$

mert a_{n-1} az $1 \times n$ -es téglalap azon parkettázásainak száma, amelyek 1×1 -es parkettával kezdődnek; a_{n-2} pedig azon parkettázások száma, amelyek 1×2 -es parkettával kezdődnek:



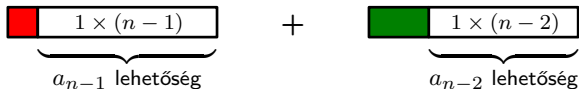
Mivel $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, ezért az $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozat a Fibonacci-sorozat (hiszen eleget tesz a Fibonacci-sorozatot definiáló $(*)$ rekurciónak és **a kezdőfeltételeknek is**).

2. példa: Hányféleképpen lehet leparkettázni egy $1 \times n$ -es téglalapot 1×1 -es négyzetekkel és 1×2 -es dominókkal?

Megoldás. Ha a_n jelöli a feladatra adott választ, akkor

$$(*) \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (\text{ha } n \geq 2),$$

mert a_{n-1} az $1 \times n$ -es téglalap azon parkettázásainak száma, amelyek 1×1 -es parkettával kezdődnek; a_{n-2} pedig azon parkettázások száma, amelyek 1×2 -es parkettával kezdődnek:



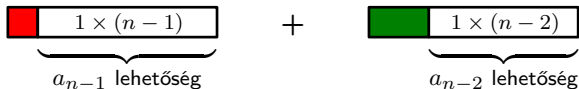
Mivel $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, ezért az $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozat a Fibonacci-sorozat (hiszen eleget tesz a Fibonacci-sorozatot definiáló $(*)$ rekurziónak és **a kezdőfeltételeknek is**). a_0 jelentése nem teljesen világos. De ahhoz, hogy a_2 értékét helyesen adja meg a fenti gondolatmenet ($a_2 = 2$), az a_0 -t 1-nek KELL tekinteni.

2. példa: Hányféleképpen lehet leparkettázni egy $1 \times n$ -es téglalapot 1×1 -es négyzetekkel és 1×2 -es dominókkal?

Megoldás. Ha a_n jelöli a feladatra adott választ, akkor

$$(*) \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (\text{ha } n \geq 2),$$

mert a_{n-1} az $1 \times n$ -es téglalap azon parkettázásainak száma, amelyek 1×1 -es parkettával kezdődnek; a_{n-2} pedig azon parkettázások száma, amelyek 1×2 -es parkettával kezdődnek:



Mivel $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, ezért az $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozat a Fibonacci-sorozat (hiszen eleget tesz a Fibonacci-sorozatot definiáló $(*)$ rekurziónak és **a kezdőfeltételeknek is**).

Tehát F_n -féleképpen lehet leparkettázni az $1 \times n$ -es téglalapot, ahol F_n az n -edik Fibonacci-szám. $\square$

Érdemes külön kiemelni a kapott eredményt:

Tétel. Az F_n Fibonacci-szám az $1 \times n$ -es téglalap 1×1 -es és 1×2 -es parkettákkal történő parkettázásait számolja meg.

Kép forrása: Wikipedia

Érdemes külön kiemelni a kapott eredményt:

Tétel. Az F_n Fibonacci-szám az $1 \times n$ -es téglalap 1×1 -es és 1×2 -es parkettákkal történő parkettázásait számolja meg.

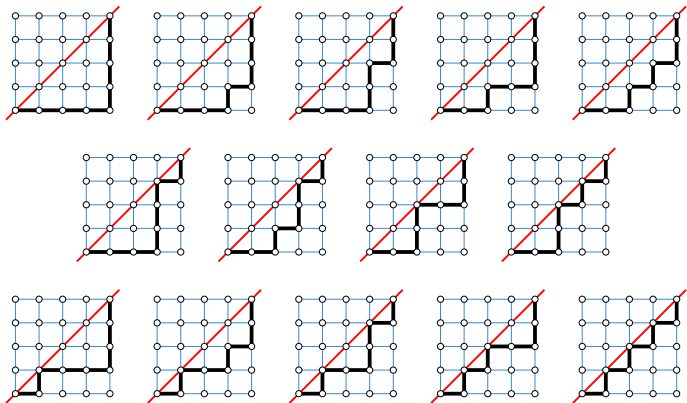
Egy alkalmazás (nem vizsgaanyag).

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k} = F_n.$$

Bizonyítás. Mindkét oldal az $1 \times n$ -es téglalap (tételbeli) parkettázásait számolja meg. A bal oldal az 1×2 -es parketták száma szerint osztályoz: $\binom{n-k}{k}$ azon parkettázások száma, amelyekben k darab 1×2 -es parketta van (és $n - 2k$ darab 1×1 -es). $\square$

3. példa: Hányféleképpen lehet eljutni a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ négyzetrácson a $(0, 0)$ pontból az (n, n) pontba (egység-hosszú) $\rightarrow$ és $\uparrow$ lépésekkel úgy, hogy soha nem megyünk az $y = x$ egyenes fölé?

Például $n = 4$ esetén 14 ilyen út van:



3. példa: Hányféleképpen lehet eljutni a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ négyzetrácson a $(0, 0)$ pontból az (n, n) pontba (egység hosszú) $\rightarrow$ és $\uparrow$ lépésekkel úgy, hogy soha nem megyünk az $y = x$ egyenes fölé?

Megoldás. Jelölje a választ C_n . Belátjuk a következő rekurziót:

$$C_0 = 1. \quad C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}, \quad \text{ha } n \geq 1.$$

3. példa: Hányféleképpen lehet eljutni a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ négyzetrácson a $(0, 0)$ pontból az (n, n) pontba (egység hosszú) $\rightarrow$ és $\uparrow$ lépésekkel úgy, hogy soha nem megyünk az $y = x$ egyenes fölé?

Megoldás. Jelölje a választ C_n . Belátjuk a következő rekurziót:

$$C_0 = 1. \quad C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}, \quad \text{ha } n \geq 1.$$

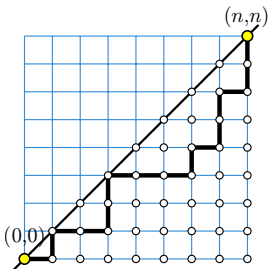
$C_0 = 1$ nyilvánvaló, mert $n = 0$ esetén a kezdőpont megegyezik a végcéllal, így egyetlen „eljutási lehetőség” van: ha nem lépünk egyet sem.

3. példa: Hányféleképpen lehet eljutni a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ négyzetrácson a $(0,0)$ pontból az (n,n) pontba (egység-hosszú) $\rightarrow$ és $\uparrow$ lépésekkel úgy, hogy soha nem megyünk az $y = x$ egyenes fölé?

Megoldás. Jelölje a választ C_n . Belátjuk a következő rekurziót:

$$C_0 = 1. \quad C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}, \quad \text{ha } n \geq 1.$$

Legyen $n \geq 1$. Ekkor minden megszámlolandó „útnak” a végpontot leszámítva is van pontja az $y = x$ átlón (pl. a kezdőpont).

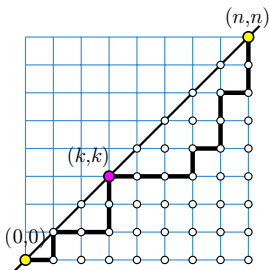


3. példa: Hányféleképpen lehet eljutni a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ négyzetrácson a $(0,0)$ pontból az (n,n) pontba (egység-hosszú) $\rightarrow$ és $\uparrow$ lépésekkel úgy, hogy soha nem megyünk az $y = x$ egyenes fölé?

Megoldás. Jelölje a választ C_n . Belátjuk a következő rekurziót:

$$C_0 = 1. \quad C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}, \quad \text{ha } n \geq 1.$$

Legyen $n \geq 1$. Ekkor minden megszámlolandó „útnak” a végpontot leszámítva is van pontja az $y = x$ átlón (pl. a kezdőpont).



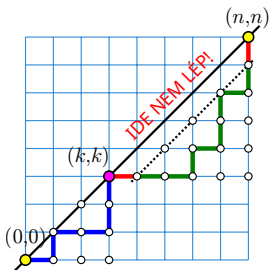
$C_k C_{n-1-k}$ azokat az utakat számolja meg, amelyek a (k,k) pontban lépnek **utoljára** az átlóra a végpont előtt ($k = 0, 1, \dots, n-1$):

3. példa: Hányféleképpen lehet eljutni a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ négyzetrácson a $(0,0)$ pontból az (n,n) pontba (egység-hosszú) $\rightarrow$ és $\uparrow$ lépésekkel úgy, hogy soha nem megyünk az $y = x$ egyenes fölé?

Megoldás. Jelölje a választ C_n . Belátjuk a következő rekurziót:

$$C_0 = 1. \quad C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}, \quad \text{ha } n \geq 1.$$

Legyen $n \geq 1$. Ekkor minden megszámlolandó „útnak” a végpontot leszámítva is van pontja az $y = x$ átlón (pl. a kezdőpont).



$C_k C_{n-1-k}$ azokat az utakat számolja meg, amelyek a (k,k) pontban lépnek **utoljára** az átlóra a végpont előtt ($k = 0, 1, \dots, n-1$):

A $(0,0) \rightsquigarrow (k,k)$ szakaszra C_k lehetőség van;

az ábrán pirossal jelölt két lépés fix;

a $(k+1,k) \rightsquigarrow (n,n-1)$ szakaszra C_{n-1-k} leh. van.



Az előző példánál látott sorozat gyakran felbukkan összeszámlálási problémák megoldásakor:

Definíció. A

$$C_0 = 1;$$
$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}, \quad \text{ha } n \geq 1$$

rekurzióval definiált sorozat elemeit **Catalan-számoknak** nevezzük: 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, ...

Az előző példánál látott sorozat gyakran felbukkan összeszámlálási problémák megoldásakor:

Definíció. A

$$C_0 = 1;$$
$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}, \quad \text{ha } n \geq 1$$

rekurzióval definiált sorozat elemeit **Catalan-számoknak** nevezzük: 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, ...

$$C_0 = 1$$

Az előző példánál látott sorozat gyakran felbukkan összeszámlálási problémák megoldásakor:

Definíció. A

$$C_0 = 1;$$
$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}, \quad \text{ha } n \geq 1$$

rekurzióval definiált sorozat elemeit **Catalan-számoknak** nevezzük: 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, ...

$$C_0 = 1$$

$$C_1 = C_0 C_0 = 1$$

Az előző példánál látott sorozat gyakran felbukkan összeszámlálási problémák megoldásakor:

Definíció. A

$$C_0 = 1;$$
$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}, \quad \text{ha } n \geq 1$$

rekurzióval definiált sorozat elemeit **Catalan-számoknak** nevezzük: 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, ...

$$C_0 = 1$$

$$C_1 = C_0 C_0 = 1$$

$$C_2 = C_0 C_1 + C_1 C_0 = 2$$

Az előző példánál látott sorozat gyakran felbukkan összeszámlálási problémák megoldásakor:

Definíció. A

$$C_0 = 1;$$
$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}, \quad \text{ha } n \geq 1$$

rekurzióval definiált sorozat elemeit **Catalan-számoknak** nevezzük: 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, ...

$$C_0 = 1$$

$$C_1 = C_0 C_0 = 1$$

$$C_2 = C_0 C_1 + C_1 C_0 = 2$$

$$C_3 = C_0 C_2 + C_1 C_1 + C_2 C_0 = 5$$

Az előző példánál látott sorozat gyakran felbukkan összeszámlálási problémák megoldásakor:

Definíció. A

$$C_0 = 1;$$
$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}, \quad \text{ha } n \geq 1$$

rekurzióval definiált sorozat elemeit **Catalan-számoknak** nevezzük: 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, ...

$$C_0 = 1$$

$$C_1 = C_0 C_0 = 1$$

$$C_2 = C_0 C_1 + C_1 C_0 = 2$$

$$C_3 = C_0 C_2 + C_1 C_1 + C_2 C_0 = 5$$

$$C_4 = C_0 C_3 + C_1 C_2 + C_2 C_1 + C_3 C_0 = 14$$

Az előző példánál látott sorozat gyakran felbukkan összeszámlálási problémák megoldásakor:

Definíció. A

$$C_0 = 1;$$
$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}, \quad \text{ha } n \geq 1$$

rekurzióval definiált sorozat elemeit **Catalan-számoknak** nevezzük: 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, ...

$$C_0 = 1$$

$$C_1 = C_0 C_0 = 1$$

$$C_2 = C_0 C_1 + C_1 C_0 = 2$$

$$C_3 = C_0 C_2 + C_1 C_1 + C_2 C_0 = 5$$

$$C_4 = C_0 C_3 + C_1 C_2 + C_2 C_1 + C_3 C_0 = 14$$

$$C_5 = C_0 C_4 + C_1 C_3 + C_2 C_2 + C_3 C_1 + C_4 C_0 = 42 \quad \dots$$

Megismételjük a 3. példa megoldásakor kapott eredményt:

Tétel. A C_n Catalan-szám megszámlolja azokat a $\rightarrow$ és $\uparrow$ lépésekből álló $(0, 0) \rightsquigarrow (n, n)$ utakat, amelyek soha nem lépnek az $y = x$ egyenes fölé. (Ezeket az utakat Dyck-utaknak nevezzük.)

Megismételjük a 3. példa megoldásakor kapott eredményt:

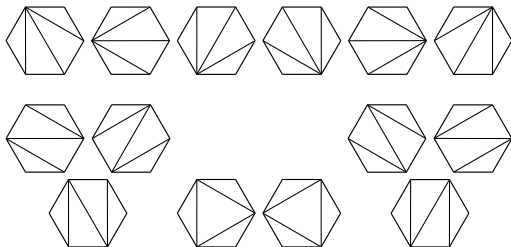
Tétel. A C_n Catalan-szám megszámolja azokat a $\rightarrow$ és $\uparrow$ lépésekből álló $(0, 0) \rightsquigarrow (n, n)$ utakat, amelyek soha nem lépnek az $y = x$ egyenes fölé. (Ezeket az utakat Dyck-utaknak nevezzük.)

Richard Stanley több mint 200 további kombinatorikus leírást gyűjtött össze, ezekből ismertetünk néhányat (bizonyítás nélkül):

1. Egy **konvex** $(n + 2)$ -szöget C_n -féleképpen lehet egymást nem metsző átlókkal háromszögekre bontani.

$$n = 4$$

$$C_4 = 14$$



Megismételjük a 3. példa megoldásakor kapott eredményt:

Tétel. A C_n Catalan-szám megszámolja azokat a $\rightarrow$ és $\uparrow$ lépésekből álló $(0, 0) \rightsquigarrow (n, n)$ utakat, amelyek soha nem lépnek az $y = x$ egyenes fölé. (Ezeket az utakat Dyck-utaknak nevezzük.)

Richard Stanley több mint 200 további kombinatorikus leírást gyűjtött össze, ezekből ismertetünk néhányat (bizonyítás nélkül):

1. Egy **konvex** $(n+2)$ -szöget C_n -féleképpen lehet egymást nem metsző átlókkal háromszögekre bontani.
2. Egy $(n+1)$ -tényezős szorzatot C_n -féleképpen lehet zárójelezni.

Például $n = 3$ esetén az $abcd$ szorzatnak $C_3 = 5$ zárójelezése van:

$$((ab)c)d, (a(bc))d, (ab)(cd), a((bc)d), a(b(cd)).$$

Megismételjük a 3. példa megoldásakor kapott eredményt:

Tétel. A C_n Catalan-szám megszámolja azokat a $\rightarrow$ és $\uparrow$ lépésekből álló $(0, 0) \rightsquigarrow (n, n)$ utakat, amelyek soha nem lépnek az $y = x$ egyenes fölé. (Ezeket az utakat Dyck-utaknak nevezzük.)

Richard Stanley több mint 200 további kombinatorikus leírást gyűjtött össze, ezekből ismertetünk néhányat (bizonyítás nélkül):

1. Egy **konvex** $(n+2)$ -szöget C_n -féleképpen lehet egymást nem metsző átlókkal háromszögekre bontani.
2. Egy $(n+1)$ -tényezős szorzatot C_n -féleképpen lehet zárójelezni.
- 3.* Az $[n]$ halmaznak C_n darab olyan sorbaállítása van, amelyben nincs 3 hosszú monoton növekvő részsorozat.

Például $n = 4$ esetén $C_4 = 14$ ilyen sorbaállítás van:

1432, 2143, 2413, 2431, 3142, 3214, 3241,
3412, 3421, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321.

Tétel. (A Catalan-számok zárt alakja.)

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}.$$