

1. GENERÁTORFÜGGVÉNYEK

1. Bizonyítsuk be a következő azonosságokat:

a) $0\binom{n}{0} + 1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \dots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}.$

b) $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}.$

2. Az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaznak hány

a) páros;

b) 3-mal osztható;

c) 4-gyel osztható

elemszámú részhalmaza van?

3.⁺ Azt szeretnénk megtippelni, hogy a kihúzott lottószámok összege páros vagy páratlan lesz-e. Melyik lehetőségnek nagyobb a valószínűsége

a) ötöslottó esetén (90 számból 5-öt húznak ki),

b) hatoslottó esetén (45 számból 6-ot húznak ki),

c) skandináv lottó esetén (35 számból 7-et húznak ki)?

Olyan megoldást adjunk, amely nagy számok esetén is működik (pl. ha 2018 számból húzunk 100-at).

4. Jelölje $\binom{n}{k}$ azt, hogy egy n elemű alaphalmaz felett hány k elemű multihalmaz van, vagyis legyen $\binom{n}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$. Mutassuk meg, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k = (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)^n = \frac{1}{(1-x)^n}.$$

5. Hány olyan k elemű multihalmaz van $[2n]$ felett, amelyben $1, 2, \dots, n$ multiplicitása legfeljebb 1, és $n+1, n+2, \dots, 2n$ multiplicitásai párosak?

6.⁺ Bizonyítsuk be, hogy $\sum c_1 \dots c_k = \binom{n+k-1}{2k-1}$, ahol az összegezés az összes olyan nemnegatív egészekből álló $\{c_i\}_{i=1}^k$ sorozaton fut végig, amelyre $c_1 + \dots + c_k = n$.

7.⁺ Jelölje $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ azt, hogy az $\{1, \dots, n\}$ alaphalmazon hány olyan permutáció van, amely k ciklusból áll. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{k=0}^n \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] x^k = x(x+1)(x+2) \dots (x+n-1).$$

8. Igazoljuk, hogy ha $n \geq 2$, akkor S_n -ben ugyanannyi páros sok ciklust tartalmazó permutáció van, mint páratlan sok ciklust tartalmazó!

9. Mennyi a ciklusok száma S_n permutációiban összesen?

10. Oldjuk meg a következő lineáris rekurziókat.

a) $a_0 = 1, a_1 = 6; \quad a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ (ha $n \geq 2$).

b) $a_0 = 3, a_1 = 6; \quad a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$ (ha $n \geq 2$).

c) $a_0 = 1, a_1 = 2; \quad a_n = 6a_{n-1} - 7a_{n-2}$ (ha $n \geq 2$).

d) $a_0 = 1, a_1 = 1; \quad a_n = 4a_{n-1} - 2a_{n-2}$ (ha $n \geq 2$).

e) $a_0 = 6, a_1 = 8; \quad a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ (ha $n \geq 2$).

f) $a_0 = 3, a_1 = -3; \quad a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ (ha $n \geq 2$).

g) $a_0 = 1, a_1 = 1; \quad a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ (ha $n \geq 2$).

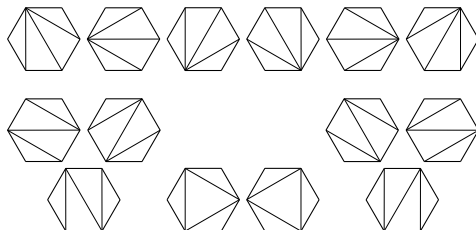
h) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 13; \quad a_n = 3a_{n-1} - 4a_{n-3}$ (ha $n \geq 3$).

i) $a_0 = 17, a_1 = 14, a_2 = 110; \quad a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3}$ (ha $n \geq 3$).

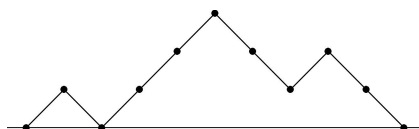
11.+ Oldjuk meg a következő rekurziót:

$$a_0 = a_1 = 1; \quad a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 3n + 2^n \quad (\text{ha } n \geq 2).$$

12. Hányféleképpen lehet egy konvex $(n+2)$ -szöget egymást nem metsző átlókkal háromszögekre bontani?



13. A $2n$ hosszú Dyck-út egy olyan origóból induló út, amely n darab $\nearrow$ és n darab $\searrow$ lépésből áll (tehát az x -tengelyen végződik), és (A megengedett $\nearrow$ és $\searrow$ lépések rendre a $(1, 1)$ és $(1, -1)$ lépések.) Hány darab $2n$ hosszú Dyck-út van?



14. Egy kör alakú asztal körül $2n$ -en ülnek. Hányféleképpen alkothatnak az asztal körül ülők n párt. úgy, hogy az egy párban lévők kezét foghassanak anélkül, hogy egy másik kezét fogó pár keze alatt vagy felett át kellene nyúlniuk? (Az asztal felett való átnyúlás megengedett.)

15. Bizonyítsuk be a Newton-formula segítségével, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n.$$

16. Igazoljuk, hogy

$$\sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = 4^n.$$

17.+ Igazoljuk, hogy

$$\sum_{k=0}^n C_{2k} C_{2n-2k} = 4^n C_n,$$

ahol C_n az n -edik Catalan-számot jelöli, azaz $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.