Az $\left[{n \atop k}\right]$ számok generátorfüggvénye

Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}$ rögzített.*

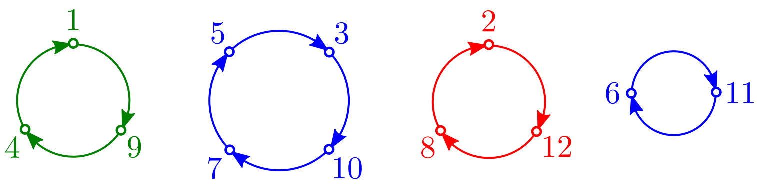
$$\sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k}\right] x^k = x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1).$$

Bizonyítás. Mindkét oldalon egy n-edfokú polinom szerepel. Függvényként tekintve a két oldalra, belátjuk, hogy bármilyen m pozitív egész számot is helyettesítünk x helyére, a két oldal megegyezik. Ebből következik a tételbeli két (formális) polinom egyenlősége. (Lásd „A polinomok kétféle szemlélete közötti kapcsolat" segédanyag lemmáját.)

Kettős leszámlálással mutatjuk meg, hogy tetszőleges $m \in \mathbb{Z}^+$ esetén

$$\sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k}\right] m^k = m(m+1)(m+2)\dots(m+n-1).$$

Mindkét oldal az $[n]$ halmaz ciklusszínezett permutációit számolja meg, ha m szín áll rendelkezésre a ciklusok színezéséhez. (Ciklusszínezett permutáció alatt a továbbiakban egy olyan permutációt értünk, amelynek minden ciklusát kiszíneztük valamilyen színnel. Az alábbi ábra világossá teszi a fogalmat.)



A bal oldal a ciklusok száma szerint osztályozva számol: $\left[{n \atop k}\right] m^k$ darab olyan ciklusszínezett permutáció van, amelynek k ciklusa van. Ugyanis $\left[{n \atop k}\right]$-féleképpen tudunk megadni egy k ciklusú (színezetlen) permutációt az $[n]$ halmazon, majd a választott permutációt m^k-féleképpen tudjuk ciklusszínezni.

A jobb oldal a következőképpen számol. Az $\{1\}$ alaphalmazon nyilván m darab ciklusszínezett permutáció van. Az $[n]$ alaphalmaz ciklusszínezett permutációit megkaphatjuk úgy, hogy „egyesével szúrjuk be" a $2, 3, \dots, n$ további elemeket a már felépített ciklusszínezett permutációba. Amikor az i elemet ($2 \le i \le n$) hozzávesszük a már felépített ciklusszínezett permutációnkhoz (melynek alaphalmaza $[i-1]$), akkor vagy egy új 1 hosszú ciklust hozunk létre vele ('i' egyedül alkot egy ciklust), amelyet m-féleképpen színezhetünk ki, vagy az i elemet „betoldjuk" egy már meglévő ciklusba (aminek a színét megörökli 'i'), ahol a betoldás helyének megválasztására $i-1$ lehetőségünk van. Összegezve, az 'i' elem beszúrásánál $m+i-1$ döntési lehetőségünk van (a korábbi döntéseinktől függetlenül). Nem nehéz látni, hogy ezzel a felépítési eljárással $[n]$ összes ciklusszínezett permutációját megkapjuk, és mindegyiket pontosan egyszer, tehát a fentiekből következően a számuk $m(m+1)(m+2)\dots(m+n-1)$. $\square$