6. Gessel–Viennot-lemma

1. Hány olyan λ (szám)partíció van, amelynek minden tagja legfeljebb n, és a tagok száma legfeljebb m?

2. Jelöljük az előző feladatban szereplő partíciók halmazát $\square_{m,n}$-nel. Tekintsük azon (λ, μ) partíciópárokat, amelyekre $\lambda, \mu \in \square_{m,n}$, továbbá $\lambda \subseteq \mu$. Mutassuk meg, hogy ezen partíciópárok száma $\binom{m+n}{m}^2 - \binom{m+n}{m+1}\binom{m+n}{m-1}$.
Megjegyzés: Ebben a feladatban $\lambda \subseteq \mu$ alatt azt értjük, hogy λ Young-diagramja részhalmaza μ Young-diagramjának.

3. Hányféleképpen tölthetjük ki az 4×4-es négyzetet az $1, 2, 3, 4$ számokkal úgy, hogy minden sorban (balról jobbra) és oszlopban (felülről lefelé) monoton nőjenek a számok?

4. Legyenek $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ és $b_1 < b_2 < \cdots < b_n$ természetes számok. Legyen M az az $(m_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ amelyre $m_{ij} = \binom{a_i}{b_j}$. Mutassuk meg, hogy ekkor az M determinánsa nemnegatív.

5. Igazoljuk, hogy

$$\begin{vmatrix} C_0 & C_1 & C_2 & \dots & C_n \\ C_1 & C_2 & C_3 & \dots & C_{n+1} \\ C_2 & C_3 & C_4 & \dots & C_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_n & C_{n+1} & C_{n+2} & \dots & C_{2n} \end{vmatrix} = 1,$$

ahol C_k a k-adik Catalan-számot jelöli.

6. Bizonyítsuk be a determinánsok szorzástételét a Gessel–Viennot-lemma segítségével.