4. Lineáris algebrai módszer

1. (Uniform Fisher-egyenlőtlenség.) Bizonyítsuk be a következőt:
Ha az $\{1, \ldots, n\}$ alaphalmaz m darab különböző, s-elemű részhalmazára teljesül, hogy bármely kettő metszetének elemszáma ugyanaz a $t \neq 0$ szám (ahol $t < s$), akkor $m \leq n$.

2. (Nemuniform Fisher-egyenlőtlenség.) Bizonyítsuk be a következőt:
Ha az $\{1, \ldots, n\}$ alaphalmaz m darab különböző részhalmazára teljesül, hogy bármely kettő metszetének elemszáma ugyanaz a $t \neq 0$ szám, akkor $m \leq n$.

3. (Erdős–de Bruijn-tétel.) Bizonyítsuk be, hogy a sík m nem kollineáris pontja legalább m egyenest határoz meg.

4. (Odd/even town.) Az $\{1, \ldots, n\}$ alaphalmaz m különböző részhalmazára teljesülnek a következők:

- mindegyik halmaz páratlan elemszámú;
- bármely két különböző halmaz metszete páros elemszámú.

Bizonyítsuk be, hogy ekkor $m \leq n$.

5. (Nagy Zsigmond explicit Ramsey-konstrukciója.) Vegyünk egy $\binom{k-1}{3}$ pontú teljes gráfot, amelynek csúcsait feleltessük meg az $\{1, \ldots, k-1\}$ halmaz 3-elemű részhalmazainak. A gráf éleit pirosra és kékre színezzük a következők szerint: Egy él pontosan akkor legyen kék, ha a végpontjainak megfelelő halmazok metszete egyelemű (más esetekben piros lesz az él). Igazoljuk, hogy ekkor nem alakul ki monokromatikus (= egyszínű) k pontú klikk a gráfban.

6. Egy $2n$ pontú egyszerű gráfban minden foka páros. Igazoljuk, hogy van két olyan csúcs, hogy azon csúcsok száma, amelyek mindkettővel összekötöttek, páros.

Segítség: Dolgozzunk szomszédsági mátrixszal $\mathbb{Z}_2$ felett.

7. Bizonyítsuk be, hogy nincs 4 olyan pont a síkon, hogy bármely kettő távolsága páratlan egész szám.

8. Igazoljuk, hogy legfeljebb $n+1$ pontot lehet úgy felvenni az n-dimenziós térben, hogy bármely két pont távolsága ugyanannyi legyen.

9.$^{+}$ (Larman–Rogers–Seidel-tétel.)

a) Bizonyítsuk be, hogy legfeljebb $\frac{1}{2}(n+1)(n+4)$ pontot lehet úgy felvenni az n-dimenziós térben, hogy a pontpárok között csak kétféle távolság lépjen fel.

b) Konstruáljunk példát arra, hogy $\binom{n+1}{2}$ pont felvehető így.