3. Számok partíciói

1. Számítsuk ki a

$$\prod_{k=0}^{\infty}(1+x^{2^k}) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\dots$$

szorzatot.

2. Egy természetes szám *partícióján* a szám egy pozitív egészekre történő felbontását értjük (a tagok sorrendje nem számít). Például a 4 szám partíciói: $4,\ 3{+}1,\ 2{+}2,\ 2{+}1{+}1,\ 1{+}1{+}1{+}1$. Legyen $p^{\leq k}(n)$ az n szám azon partícióinak száma, melyekben minden tag legfeljebb k. Továbbá legyen $p_{\leq k}(n)$ az n szám azon partícióinak száma, melyek legfeljebb k tagból állnak. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges n, k természetes számokra $p^{\leq k}(n) = p_{\leq k}(n)$.

3. Jelölje $p^{\text{kül}}(n)$ az n szám azon partícióinak számát, amelyekben minden tag különböző. Jelölje $p^{\text{ptlan}}(n)$ az n szám azon partícióinak számát, amelyekben minden tag páratlan. Bizonyítsuk be, hogy

$$p^{\text{kül}}(n) = p^{\text{ptlan}}(n),$$

4. Jelölje $p^{2\times}(n)$ az n szám azon partícióinak számát, amelyben minden szám legfeljebb kétszer fordul elő tagként, továbbá jelölje $p^{3k\pm1}(n)$ az n szám azon partícióinak számát, amelyben egyik tag sem osztható 3-mal. Igazoljuk, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ számra

$$p^{2\times}(n) = p^{3k\pm1}(n).$$

Segítség: Az előző feladat kombinatorikus és hatványsoros megoldása is általánosítható.

5. Az n szám egy λ partícióját önkonjugáltnak nevezzük, ha $\overline{\lambda} = \lambda$, azaz ha λ Young-diagramja szimmetrikus a főátlóra. Jelölje $\overline{p}(n)$ az n szám önkonjugált partíciónak számát; továbbá jelölje $p^{\text{kül,ptlan}}(n)$az n szám különböző páratlan tagokból álló partíciónak számát. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ számra

$$\overline{p}(n) = p^{\text{kül,ptlan}}(n).$$

6. Számítsuk ki az

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)\dots$$

szorzat első néhány együtthatóját. Mi köze van ennek a feladatnak a partíciókhoz?

Megoldások

5. $1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + \dots$