2. Formális hatványsorok, Catalan-számok

1. Hány olyan k elemű multihalmaz van $[2n]$ felett, amelyben $1, 2, \ldots, n$ multiplicitása legfeljebb 1, és $n+1, n+2, \ldots, 2n$ multiplicitásai párosak?

2.$^+$ Bizonyítsuk be, hogy $\sum c_1 \ldots c_k = \binom{n+k-1}{2k-1}$, ahol az összegezés az összes olyan nemnegatív egészekből álló $\{c_i\}_{i=1}^k$ sorozaton fut végig, amelyre $c_1 + \cdots + c_k = n$.

3. Hányféleképpen lehet a $2\times n$-es téglalapot 1×2-es dominókkal lefedni?

4. Hányféleképpen bonthatjuk fel az n számot pozitív egészek összegére, ha a tagok sorrendje is számít, és az egytagú összeg is megengedett? (Például $n = 3$ esetén 4 ilyen felbontás van: $1+1+1 = 1+2 = 2+1 = 3$.)

5. Hányféleképpen lehet az $n \in \mathbb{Z}^+$ számot *páratlan* pozitív egészek összegére bontani, ha számít a tagok sorrendje?

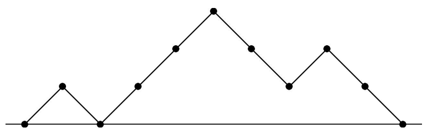
6. Bizonyítsuk be a Newton-formula segítségével, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}.$$

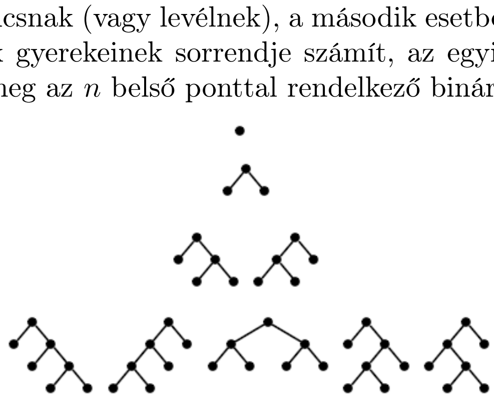
7. Igazoljuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = 4^n.$$

8. A $2n$ hosszú Dyck-út egy olyan origóból induló út, amely n darab $\nearrow$ és n darab $\searrow$ lépésből áll (tehát az x-tengelyen végződik), és nem megy az x-tengely alá. (A megengedett $\nearrow$ és $\searrow$ lépések rendre a $(1,1)$ és $(1,-1)$ lépések.) Hány darab $2n$ hosszú Dyck-út van?

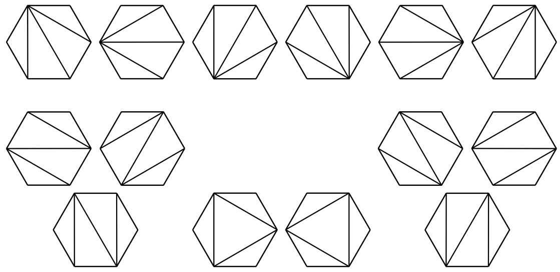


9. A bináris síkfa olyan gyökeres fa, amelyben minden csúcsnak 0 vagy 2 gyereke van; első esetben a csúcsot külső csúcsnak (vagy levélnek), a második esetben a csúcsot belső csúcsnak nevezzük. A belső csúcsok gyerekeinek sorrendje számít, az egyik gyerek a bal, a másik a jobb gyerek. Határozzuk meg az n belső ponttal rendelkező bináris síkfák számát.



10. Határozzuk meg az n élű síkfák számát. (A síkfák az előző feladatban látottak szerint vannak definiálva, csak nincs megkötés a gyerekek számára.)

11. Hányféleképpen lehet egy konvex $(n+2)$-szöget egymást nem metsző átlókkal háromszögekre bontani?



12. Az n lépésből álló Motzkin-út egy olyan n lépésből álló $(0,0) \rightsquigarrow (n,0)$ út, amelyben háromfajta lépés megengedett, az $(1,1)$, az $(1,0)$ és az $(1,-1)$, továbbá az út soha nem megy az x-tengely alá. Írjuk fel a Motzkin-utak generátorfüggvényét, ha egy Motzkin-út mérete a lépései száma.

13.$^{+}$ Igazoljuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{n} C_{2k} C_{2n-2k} = 4^n C_n,$$

ahol C_n az n-edik Catalan-számot jelöli, azaz $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.