1. A polinomok ereje

1.$^+$ Lehetséges-e két dobókockát úgy „cinkelni” (tehát az egyes számok dobásának valószínűségét úgy megváltoztatni), hogy a feldobások után a kapott számokat összeadva 2-től 12-ig minden lehetséges összeg bekövetkezésének valószínűsége azonos legyen?

2. a) A binomiális tételre való hivatkozás nélkül, kettős leszámlálással bizonyítsuk, hogy minden n és m pozitív egészre teljesül, hogy

$$(m+1)^n = 1 + \binom{n}{1}m + \binom{n}{2}m^2 + \binom{n}{3}m^3 + \cdots + \binom{n}{n}m^n.$$

b) Miért következik az előző pontból a binomiális tétel?

3. Bizonyítsuk be a következő azonosságokat:

a) $0\binom{n}{0} + 1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$.

b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.

4. Az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaznak hány
a)$^-$ páros;
b)$^+$ 3-mal osztható;
c)$^+$ 4-gyel osztható
elemszámú részhalmaza van?

5.$^+$ Azt szeretnénk megtippelni, hogy a kihúzott lottószámok összege páros vagy páratlan lesz-e. Melyik lehetőségnek nagyobb a valószínűsége
a) ötöslottó esetén (90 számból 5-öt húznak ki),
b) hatoslottó esetén (45 számból 6-ot húznak ki),
c) skandináv lottó esetén (35 számból 7-et húznak ki)?
Olyan megoldást adjunk, amely nagy számok esetén is működik (pl. ha 2023 számból húzunk 100-at).

6. Legyen n rögzített. Jelölje $\left[{n \atop k}\right]$ az $\{1, \ldots, n\}$ halmaz k ciklusból álló permutációinak számát. Igazoljuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k = x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1).$$

7. Igazoljuk, hogy ha $n \geq 2$, akkor S_n-ben ugyanannyi páros sok ciklust tartalmazó permutáció van, mint páratlan sok ciklust tartalmazó.

8. Mennyi a ciklusok átlagos száma S_n permutációiban?

9. Mi annak a valószínűsége, hogy az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz egy véletlenül választott permutációjában az ’1’ és ’2’ elemek egy ciklusban lesznek?

10.$^+$ (Graham–Pollak-tétel.) Igazoljuk, hogy a K_n teljes gráf nem parkettázható (éldiszjunkt módon) $(n-1)$-nél kevesebb teljes páros gráffal.