

3. SZÁMOK PARTÍCIÓI

1. Számítsuk ki a

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 + x^{2^k}) = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8) \dots$$

szorzatot.

2. Bizonyítsuk be formális hatványsorok segítségével is, hogy

$$p^{\text{kiül}}(n) = p^{\text{ptlan}}(n).$$

3. Jelölje $p^{2 \times}(n)$ az n szám azon partícióinak számát, amelyben minden szám legfeljebb kétszer fordul elő tagként, továbbá jelölje $p^{3k \pm 1}(n)$ az n szám azon partícióinak számát, amelyben egyik tag sem osztható 3-mal. Igazoljuk, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ számra

$$p^{2 \times}(n) = p^{3k \pm 1}(n).$$

SEGÍTSÉG: Az előző feladat kombinatorikus és hatványsoros megoldása is általánosítható.

4. Az n szám egy λ partícióját önkonjugátnak nevezzük, ha $\bar{\lambda} = \lambda$, azaz ha λ Young-diagramja szimmetrikus a főátlóra. Jelölje $\bar{p}(n)$ az n szám önkonjugált partícióinak számát; továbbá jelölje $p^{\text{kiül,ptlan}}(n)$ az n szám különböző páratlan tagokból álló partícióinak számát. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ számra

$$\bar{p}(n) = p^{\text{kiül,ptlan}}(n).$$

5. Számítsuk ki az

$$(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)(1 - x^4)(1 - x^5) \dots$$

szorzat első néhány együtthatóját. Mi köze van ennek a feladatnak a partíciókhoz?

MEGOLDÁSOK

5. $1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + \dots$