## 1. Generátorfüggvények felírása

**Feladat.** A $*$-gal jelölt feladatoknál határozzuk meg a megadott kombinatorikus osztályok generátorfüggvényét. A kitevő a feladadatban megadott méretet kódolja a generátorfüggvényben.

**1.*** Az $a$ és $b$ karakterekből felírható (véges) szavak osztálya, ahol egy szó mérete a hossza.

$$\mathcal{A} = \{\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, \dots\}.$$

**2.*** Az $\{1, \dots, n\}$ halmaz részhalmazainak halmaza, ahol egy részhalmaz mérete az elemszáma.

**3.** A $k \in \mathbb{N}$ számra jelölje $c_k$ azt, hogy $k$-t hányféleképpen lehet pozitív egészek összegére felbontani, ha a tagok sorrendje is számít, és az egytagú összeg is megengedett. (A nulla tagú összeg eredménye pedig 0.) Például $c_3 = 4$, amelyet a $1 + 1 + 1 = 1 + 2 = 2 + 1 = 3$ felbontások mutatnak.

a) Határozzuk meg a $\sum_{k \in \mathbb{N}} c_k x^k$ generátorfüggvényt.
b) Határozzuk meg $c_k$ értékét.

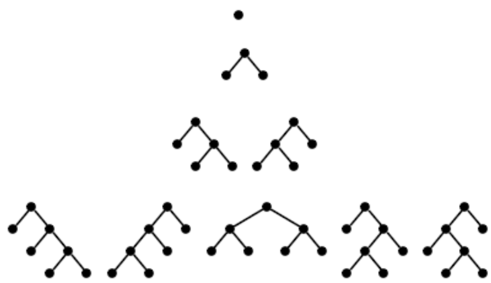
**4.** Hányféleképpen lehet a $k \in \mathbb{Z}^+$ számot *páratlan* pozitív egészek összegére bontani, ha számít a tagok sorrendje?

**5.** Hányféleképpen lehet $k$-t az előző feladatokban látott értelemben $n$ darab pozitív egész összegére bontani?

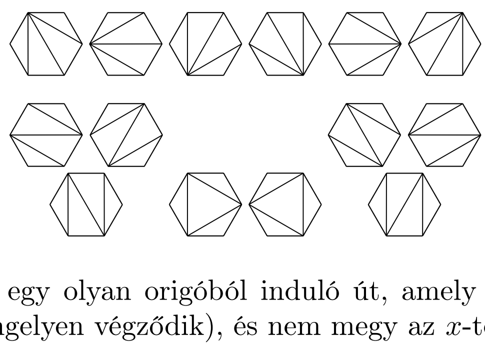
**6.*** Az $\{1, \dots, n\}$ alaphalmaz feletti multihalmazok osztálya, ahol egy multihalmaz mérete az elemszáma.

**7.** Hányféleképpen lehet a $2 \times n$-es téglalapot $1 \times 2$-es dominókkal lefedni?

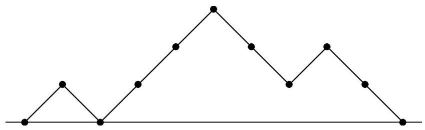
**8.*** A bináris síkfa olyan gyökeres fa, amelyben minden csúcsnak 0 vagy 2 gyereke van; első esetben a csúcsot külső csúcsnak (vagy levélnek), a második esetben a csúcsot belső csúcsnak nevezzük. A belső csúcsok gyerekeinek sorrendje számít, az egyik gyerek a bal, a másik a jobb gyerek. Írjuk fel a bináris síkfák generátorfüggvényét, ahol a bináris síkfa mérete legyen a belső csúcsok száma. Ennek segítségével határozzuk meg az $n$ belső ponttal rendelkező bináris síkfák számát.



**9.** Hányféleképpen lehet egy konvex $(n + 2)$-szöget egymást nem metsző átlókkal háromszögekre bontani?



**10.** A $2n$ hosszú Dyck-út egy olyan origóból induló út, amely $n$ darab $\nearrow$ és $n$ darab $\searrow$ lépésből áll (tehát az $x$-tengelyen végződik), és nem megy az $x$-tengely alá. (A megengedett $\nearrow$ és $\searrow$ lépések rendre a $(1, 1)$ és $(1, -1)$ lépések.) Hány darab $2n$ hosszú Dyck-út van?



**11.*** Az $n$ lépésből álló Motzkin-út egy olyan $n$ lépésből álló $(0,0) \rightsquigarrow (n,0)$ út, amelyben háromfajta lépés megengedett, az $(1,1)$, az $(1,0)$ és az $(1,-1)$, továbbá az út soha nem megy az $x$-tengely alá. Írjuk fel a Motzkin-utak generátorfüggvényét, ha egy Motzkin-út mérete a lépései száma.

**12.** Legyen $n$ rögzített. Írjuk fel az $i(n,k)$ számok generátorfüggvényét, ahol $i(n,k)$ az $\{1,\dots,n\}$ halmaz azon sorbaállításainak számát jelöli, amelyek inverziószáma $k$.

**13.** Legyen $n$ rögzített. Írjuk fel az $\left[{n \atop k}\right]$ számok generátorfüggvényét, ahol $\left[{n \atop k}\right]$ az $\{1,\dots,n\}$ halmaz $k$ ciklusból álló permutációnak számát jelöli.

## Megoldások

**1.** $A(x) = \frac{1}{1-2x}$.

**2.** $B(x) = (1+x)^n$.

**3.** a) $C(x) = 1 + \frac{x}{1-2x}$.
b) $c_0 = 1; \quad c_k = 2^{k-1}$, ha $k \geq 1$.

**4.** $[x^k]\frac{1-x^2}{1-x-x^2} = F_{k-1}$.

**5.** $[x^k]\left(\frac{x}{1-x}\right)^n = \binom{k-1}{n-1}$.

**6.** $E(x) = \frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n+k-1}{n-1} x^k$.

**7.** $[x^n]\frac{1}{1-x-x^2} = F_n$.

**8.** $\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \sum_{n\in\mathbb{N}} C_n x^n$.

**9.** $C_n$.

**10.** $C_n$.

**11.** $M(x) = \frac{1-x-\sqrt{1-2x-3x^2}}{2x^2}$.

**12.** $\sum_{k=0}^{\binom{n}{2}} i(n,k)x^k = 1(1+x)(1+x+x^2)\dots(1+x+x^2+\dots+x^{n-1})$.

**13.** $\sum_{k=1}^{n} \left[{n \atop k}\right] x^k = x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)$.