Vizsgatematika

(Egyenlőtlenségek középiskolai alkalmazásokkal I.)

(2011 - 12 II. félév; Mat. Bsc; Mat. Ma.)

I. Bernoulli-egyenlőtlenség mindhárom alakja (biz.)

Alkalmazások:

a) $\exists n > 1 : \quad 1,001^n > n^{100}$.

b) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \uparrow$

c) $f(x) = x^3 - x$ fgv max; min.

d) $\forall x > 0, y > 0$ esetén: $f(x, y) = x^y + y^x > 1$.

e) Számtani, mértani közép közötti egyenlőtlenség biz. Bernoulli- egyenlőtlenséggel.

f) Bizonyítsa be, hogy $\frac{1^\alpha + 2^\alpha + \ldots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}} \to \frac{1}{\alpha+1} \qquad (\alpha > 0)$

II. Számtani - mértani közép közötti egyenlőtlenség bizonyításai közül a következők:

a) Cauchy-féle "visszalépéses" teljes indukció

b) A Riesz-féle bizonyítás

c) $e^x \geq 1 + x$ egyenlőtlenség segítségével való bizonyítás

d) Indirekt bizonyítás

Alkalmazások:

a) Adott körbe írható max. területű téglalap

b) Adott gömbbe írható max. térfogatú henger

c) Adott kerületű $\triangle$-ek közül melyik a max. területű?

d) Adott területű $\triangle$-ek közül melyiknek a legkisebb a kerülete?

e) Adott kör köré írható háromszögek közül melyiknek a legkisebb a területe?

f) $f(x) = \mathrm{tg} x + \mathrm{ctg} x$ szélsőértékei

g) $f(x) = 2^{\sin x} + 2^{\cos x}$ fgv. minimuma

h) $f(x) = \sin^3 x(1 - \sin x)$ szélsőértékei

i) Oldja meg: $4^{x^2} + 16^{x^2} = 2 \cdot 7^{x^2}$

j) $\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{x - x^2 + 1} = x^2 - x + 2$ Oldja meg!

k) Oldja meg: $\log_x(x + 1) = \log_{x+1}(x + 2)$

l) $\sqrt{c}$ létezésének bizonyítása ($c > 0$).

III. Hatványközepek

a) $\frac{a_{,}+\ldots+a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2+\ldots+a_n^2}{n}}$ bizonyítása

b) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}$ bizonyítása

c) $\sqrt[k]{\frac{a^k+b^k}{2}} \leq \sqrt[k+1]{\frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}}$ bizonyítása $k \in N^+$.

Alkalmazások

a) $x^2+y^2+z^2$ minimumát határozza meg, ha $x+y+z=6$.

b) Egyenlő kerületű derékszögű $\triangle$ -ek közül melyiknek a legnagyobb a területe?

c) Adott körbe írt $\triangle$-ek közül melyiknek a legnagyobb a kerülete, ill. területe.

IV. A Csebisev-egyenlőtlenség bizonyítása

V. A Cauchy-féle egyenlőtlenség bizonyítása.

Alkalmazások

a) Oldja meg: $x\sqrt{1-x}+\sqrt{3+x}=2\sqrt{x^2+1}$

b) $\cos x \sin 7x + \cos 5x \sin x = \sqrt{2}$-t oldja meg.

c) Bizonyítsa be, hogy ha egy egész szám legalább kétféleképpen áll elő két négyzetszám összegeként, akkor nem lehet prím.

VI. A Jensen-egyenlőtlenséggel kapcsolatos alábbi állítás bizonyítása:

Ha $f[a,b]$-n J konvex, akkor minden $x_1,\ldots,x_n \in [a,b]$ esetén

$$f(\frac{x_1+\ldots x_n}{n}) \leq \frac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n}.$$

Alkalmazás:

a) Bizonyítsa be, hogy b_1 mely $\triangle$-ben

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}$$

b) Bizonyítsa be, hogy ha $\alpha, \beta, \gamma egy \triangle$ szögei, akkor

$$\mathrm{tg}^n\alpha + \mathrm{tg}^n\beta + \mathrm{tg}^n\gamma \geq 3\sqrt{3^n},$$

ahol $n \in N^+$.

c) Bizonyítsa be, hogy ha k egy $\triangle$ kerülete, R a $\triangle$ köré írt körének sugara, akkor

$$k \leq R \cdot 3\sqrt{3}.$$

d) Egy hegyesszögű $\triangle$ területe egységnyi. Bizonyítsa be, hogy van olyan belső pontja, amelynek a három csúcstól mért távolságai legalább 0,86.

2012. 04. 20. Németh József