Néhány érdekes végtelen összegről

Dr. Németh József
SZTE TTIK Bolyai Intézet
Analízis Tanszék
http://www.math.u-szeged.hu/~nemethj

Háttéranyag:

Németh József: Előadások a végtelen sorokról
(Polygon, Szeged, 2002)

”Nagy”

a) *Arkhimédesz* (i.e. 250) $10^{8\cdot 10^{16}}$

(1m=400 jegy; 8 napig fut mellette a fény)

b) *Ókori India*: 10^{23} majom

c) *Sakk*

$1+2+2^2+\cdots+2^{63} = 2^{64}-1$ búzaszem

$2^{64}-1 = 1,844674407\cdot 10^{19} \approx 922000$ millió tonna

(1998: 600 millió tonna a világ évi búzatermése; 1500 évi búzatermés)

d) Minden nap 100.000 Ft=3 millió Ft

$1+2+4+8+\cdots+2^{29} = 2^{30}-1 = 10.73741823 > 10$ millió Ft

e) Egy 2 km oldalú kockában elhelyezhető a világ összlakossága. $2\cdot 10^3\cdot 2\cdot 10^3\cdot 10^3$ ”fülke”

Végtelen összegek

a) ”Csoki”

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=1$$

b) $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}+\cdots=?$

α) TORTA

β)

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots&=A\\ \frac{1}{3^2}+\cdots&=\frac{1}{3}A\end{aligned}\right\}\Rightarrow \frac{1}{3}=\frac{2}{3}A\Rightarrow A=\frac{1}{2}.$$

c)

$$\left.\begin{aligned}1+2+2^2+\cdots&=A\\ 2+2^2+\cdots&=2A\end{aligned}\right\}\Rightarrow -A=1\Rightarrow A=-1$$

d) $1-1+1-1+\cdots=A$ (Leibniz)

α) $A=0$

β) $A=1$

$\gamma)\ A = \dfrac{1}{2}$

$$\delta) \quad \underbrace{\frac{1-x}{1-x^3}}_{\dfrac{1}{1+x+x^2}} = 1 - x + x^3 - x^4 + x^6 - \cdots \Rightarrow A = \frac{1}{3}$$

(Vessük el a végtelent!)

Definíció. $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \overset{?}{=} A$

$s_n = a_1 + \cdots + a_n \to A$, akkor a végtelen sok szám összegén A-t értjük.

Pl.:

1) "CSOKI":

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} \to \frac{1}{2} \cdot \frac{0 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 1.$$

2) "TORTA":

$$s_n = \frac{1}{3} \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1}{\frac{1}{3} - 1} \to \frac{1}{3} \cdot \frac{0 - 1}{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}.$$

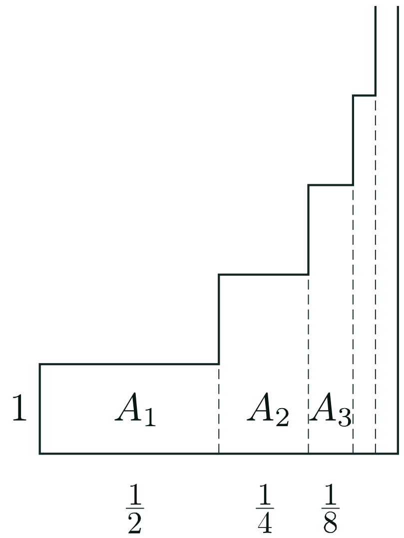
Mértani sor: $1 + q + q^2 + \cdots + q^n +$

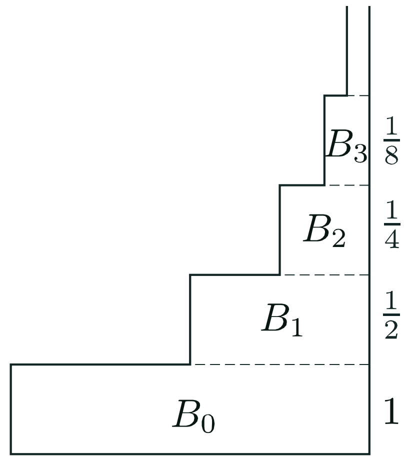
$\dots = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, ha $|q| < 1$, hiszen $s_n = \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

3) $1 + 2 + 2^3 + \cdots$ esetén $s_n = 1 + 2 + \cdots + 2^n = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} \to \infty$.

4) $1 - 1 + 1 - 1 \dots$ esetén $s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, \dots$, így s_n nem "tart" egy számhoz sem, azaz nincs összege ennek a végtelen sok számnak.

Egy további érdekes összeg: $\frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$ (Swineshead; XIV. század; fizika, valószínűség).





Bontsuk fel a sort a következőképpen:

$$
\begin{array}{l}
\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1 \\
\qquad\; \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = \frac{1}{2} \\
\qquad\qquad\quad \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = \frac{1}{2^2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \ddots \qquad\qquad\qquad \vdots
\end{array}
$$

Megjegyzés: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1000n}{1,06^n} \approx ?$

$$\frac{1000}{1,06}+\frac{1000\cdot 2}{1,06^2}+\frac{1000\cdot 3}{1,06^3}+\cdots$$

Néhány további érdekes összeg:

a) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=?$
(harmonikus sor)

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{83}>5$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{227}>6$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{33617}>11$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{248397}>13$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1,5\cdot 10^{43}}>100$$

Lassú (példa)

$$
\begin{aligned}
1 + \frac{1}{2} \quad & = 1 + \frac{1}{2} \\
+\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \quad & \geq 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\
+\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \quad & \geq 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \\
+\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16} \quad & \geq 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2} \\
+\frac{1}{17} + \cdots + \frac{1}{32} \quad & \geq 16 \cdot \frac{1}{32} = \frac{1}{2} \\
+\frac{1}{33} + \cdots + \frac{1}{64} \quad & \geq 32 \cdot \frac{1}{64} = \frac{1}{2} \\
+\frac{1}{65} + \cdots + \frac{1}{128} \quad & \geq 64 \cdot \frac{1}{128} = \frac{1}{2} \\
\vdots \quad & \quad \vdots
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

Belátható:

$$\alpha) \ \sum_{g \notin n} \frac{1}{n} < 80.$$

Bizonyítsuk be, hogy a $\sum_{9 \notin n}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor konvergens.

Megoldás. Írjuk fel az új sor néhány tagját részletesen.

$$\begin{aligned}
\sum_{9 \notin n} \frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \cdots \\
&= \Bigl(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{8}\Bigr) + \Bigl(\frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{88}\Bigr) + \\
&\quad + \Bigl(\frac{1}{100} + \cdots + \frac{1}{888}\Bigr) + \cdots + \\
&\quad + \Bigl(\frac{1}{10^k} + \cdots + \frac{1}{\underbrace{8 \cdot 8 \cdots 8}_{(k+1)\text{-szer}}}\Bigr) + \cdots .
\end{aligned}$$

Végezzük el a következő felső becsléseket:

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{8}\le 1+1+\cdots 1=8,$$

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{88}\le\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{10}=8\cdot 9\cdot\frac{1}{10},$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{10^k}+\cdots+\frac{1}{\underbrace{8\cdot 8\cdots 8}_{(k+1)\text{-szer}}}\le 8\cdot 9^k\cdot\frac{1}{10^k},$$

$$\vdots$$

Így azt kapjuk, hogy

$$\sum_{9\notin n}\frac{1}{n}<8\cdot 9^0\cdot\frac{1}{10^0}+\cdots+8\Big(\frac{9}{10}\Big)^k+\cdots=$$

$$=8\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{9}{10}\Big)^k=80,$$

tehát a sor valóban konvergens.

β) s_n ($n > 1$) soha sem egész szám.

Tegyük fel, hogy van olyan $n > 1$, hogy

$$(*) \qquad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = A,$$

ahol $A \in \mathbb{N}^+$.

Legyen $p \cdot 2^r$ a legnagyobb paritású tag az 1, 2, ..., n számok között. Ekkor $(*)$ a következő alakban írható:

$$(**) \qquad \frac{u}{2^s \cdot v} + \frac{1}{p \cdot 2^r} = A,$$

ahol v és p páratlan és $r > s$ (mivel r volt a maximális paritás).

Szorozzuk be $(**)$ mindkét oldalát $2^s \cdot p \cdot v$-vel, akkor az adódik, hogy

$$u \cdot p + \frac{v}{2^{r-s}} = A \cdot 2^s \cdot p \cdot v,$$

ami ellentmondás, mert a bal oldal első tagja egész, a második pedig nem, így összegük nem adhatja ki a jobb oldalon álló egész számot. Tehát a részletösszegek nem adhatnak egész számot $(n > 1)$ esetben).

γ) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \cdots = 2,5$

Mi a helyzet, ha váltakozik az előjel?

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = ?$$

1) Az összeg: $A = \log_e 2$ (ld. könyv; 2 megoldás)
2) Átrendezés

$$\begin{array}{rl}
1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+ \quad & = A \\[2ex]
0+1+0-\frac{1}{2}+0+\frac{1}{3}+0-\frac{1}{4}+0+ \quad & = A \\[2ex]
0+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{6}+0-\frac{1}{8}+0+ \quad & = \frac{A}{2} \\
\hline
\end{array}$$

$(1)+(3):$

$$1+0+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+0+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+ \quad = \frac{3}{2}A$$

$\Rightarrow$

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+ \quad = \frac{3}{2}A \neq A.$$

Tetszőleges számhoz átrendezhető.

Még egy érdekesség:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots=\log_e\sqrt[3]{2}+\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Kérdés: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n}$ konvergens-e? Mi az összege?

b) $1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}+\cdots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$

Van véges összeg:

1) $s_n<2$

Alkalmazzuk az alábbi becslést:

(∗)

$$s_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<$$

$$<1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n},$$

majd az egyes tagokat bontsuk fel törtek különbségére az alábbi módon:

$$\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2};\quad \frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3};\quad \cdots,$$

$$\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}.$$

Így $(*)$ jobb oldala helyett az írható, hogy

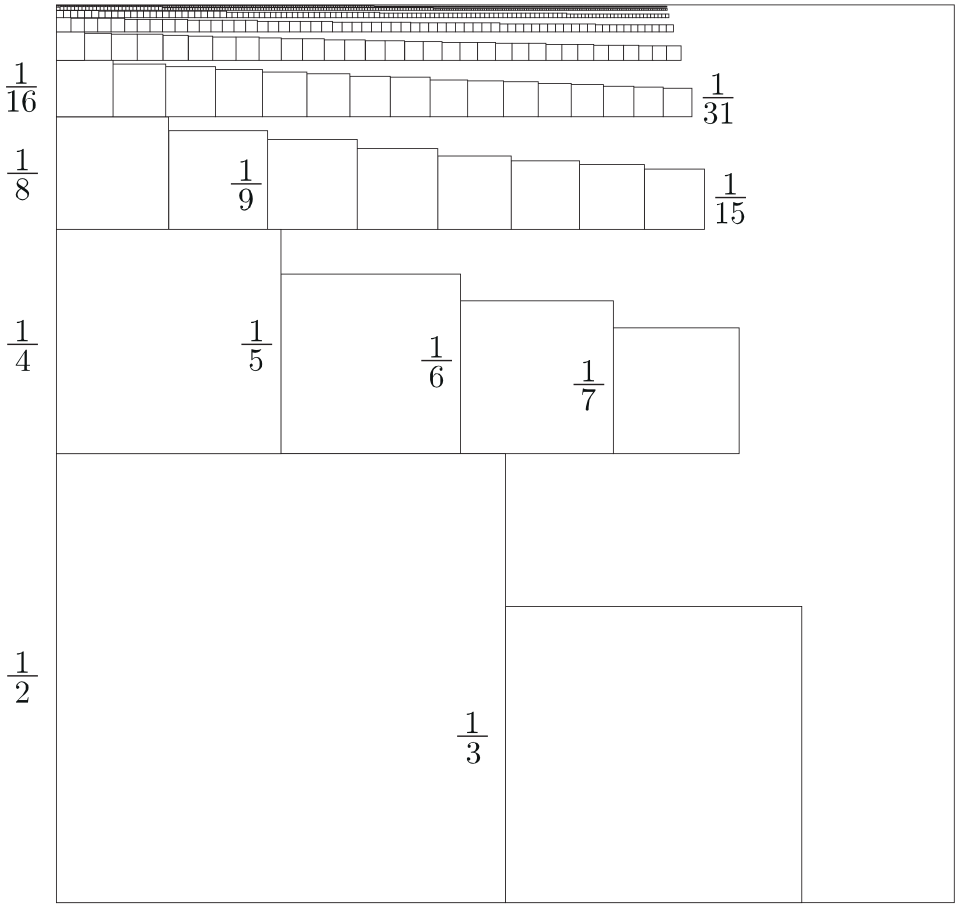
$$1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=2-\frac{1}{n},$$

hiszen a közbülső tagok kiesnek, ugyanis ez egy teleszkópikus összeg. Azt kapjuk, hogy

$$s_n \le 2-\frac{1}{n}<2$$

Versenypélda: $\frac{1}{a_1^2}+\cdots+\frac{1}{a_n^2}=1.$

2) Geometriai megoldás



Mekkora az összeg?

1689 (Jacob Bernoulli) tűzte ki (Baseli probléma)

Euler 1734

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = ?$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{100} = 1,54977$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{10000} = 1,63498$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{1000000} = 1,64393$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = 1,6449340668482264364 7\dots$$

$\frac{\pi^2}{6} \to 10$ év

Tehát $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (elemi bizonyítás a könyvben: $\sin mx = \dots$; Viete formulák n-edfokú egyenletre)

Johann Bernoulli: "Bárcsak a bátyám

megérhette volna.”

Euler memóriája: Vergilius: Aeneasz (580 oldal)

További összegek (Euler)

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{2^0}{1\cdot2\cdot3}\frac{1}{1}\pi^2$$
$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots=\frac{2^2}{5!}\frac{1}{3}\pi^4$$
$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\cdots=\frac{2^4}{7!}\frac{1}{3}\pi^6$$
$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\cdots=\frac{2^6}{9!}\frac{3}{5}\pi^8$$
$$1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\cdots=\frac{2^8}{11!}\frac{5}{3}\pi^{10}$$
$$1+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\cdots=\frac{2^{10}}{13!}\frac{691}{105}\pi^{12}$$
$$1+\frac{1}{2^{14}}+\frac{1}{3^{14}}+\cdots=\frac{2^{12}}{15!}\frac{35}{1}\pi^{14}$$

$$1 + \frac{1}{2^{16}} + \cdots = \frac{2^{14}}{17!}\frac{3617}{15}\pi^{16}$$
$$1 + \frac{1}{2^{18}} + \cdots = \frac{2^{16}}{19!}\frac{43867}{21}\pi^{18}$$
$$1 + \frac{1}{2^{20}} + \cdots = \frac{2^{18}}{21!}\frac{1222277}{55}\pi^{20}$$
$$1 + \frac{1}{2^{22}} + \cdots = \frac{2^{20}}{23!}\frac{854513}{3}\pi^{22}$$
$$1 + \frac{1}{2^{24}} + \cdots = \frac{2^{22}}{25!}\frac{1181820455}{273}\pi^{24}$$
$$1 + \frac{1}{2^{26}} + \cdots = \frac{2^{24}}{27!}\frac{76977927}{1}\pi^{26}$$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ (?) (Apery)

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ konvergens vagy divergens?

$$1+\frac{1}{\sqrt{2^3}}+\frac{1}{\sqrt{3^3}}+\frac{1}{\sqrt{4^3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^3}}+\cdots\le$$

$$\le 1+\frac{2}{\sqrt{2^3}}+\frac{4}{\sqrt{4^3}}+\frac{8}{\sqrt{8^3}}+\cdots=$$

$$=1+\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{4}}+\sqrt{\frac{1}{8}}+\cdots=$$

$$=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3+\cdots=$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\ \text{(geometriai sor)}$$

e) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+$

$\dfrac{1}{17} + \cdots = \infty$ (ld. könyv; oszthatóság; harmonikus sor)

Prímszámok a négyzetszámok között.

Mutassuk meg, hogy van két olyan szomszédos négyzetszám, amelyek közé legalább 10^6 db prímszám esik.

Megoldás. Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, azaz minden n természetes szám esetén n^2 és $(n+1)^2$ közé kevesebb, mint 10^6 db prímszám esik.

Jelölje $p_1^{(n)}, \ldots, p_{s_n}^{(n)}$ ezeket a prímszámokat. Ekkor tehát $s_n < 10^6$ teljesül minden n esetén. Nyilvánvaló, hogy ekkor

$$\frac{10^6}{n^2} > \frac{1}{p_1^{(n)}} + \frac{1}{p_2^{(n)}} + \cdots + \frac{1}{p_{s_n}^{(n)}} \,.$$

Viszont, ha mindkét oldalt összegezzük, adódik, hogy

$$10^6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n},$$

ahol a jobb oldali összegben az összes prímszám reciprok összege van. Ez nyilvánvaló, hogy ellentmondás, mert a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens, a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ sor pedig divergens, mégpedig úgy, hogy (pozitív tagú lévén) a részletösszegek tartanak a végtelenbe. Azaz eredeti állításunk valóban igaz.

f) $\sqrt{2} \approx 1,41\ldots$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}x^k + \cdots + x^n.$$

$n \to \dfrac{1}{2}$ (NEWTON)

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}x^2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}x^k + \cdots$$

$x = 1$

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1 \cdot 3}{2^3 \cdot 3!} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 \cdot 4!} + \dots$$

(irracionális; Hyppasos)

g) $\pi \approx 3,14\dots$

i.e.	2000 (B)	$3,\mathbf{1}25$
	(E)	$3,\mathbf{1}6$
	250 (A)	$3,\mathbf{141}8$
i.sz.	263 :	5 tizedesjegy
	480 :	7
	1429 :	14
	1610 :	35
	1719 :	112
	1847 :	152
	1874 :	527
	1973 :	1 001 250
	1987 :	134 217 700
	2002 :	1 240 000 000 000
	2010 :	5 000 000 000 000

François Viète (kb. 1579):

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots.$$

John Wallis (kb. 1650):

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdots}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdots}.$$

William Brouncker (kb. 1650):

$$\pi=\cfrac{4}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cdots}}}}.$$

Madhava, James Gregory, Gottfried Wilhelm Leibniz (1450–1671):

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots .$$

(lassú, de szép; Newton; biz. a könyvben)

Isaac Newton (kb. 1666):

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24\left(\frac{2}{3\cdot 2^3} - \frac{1}{5\cdot 2^5} - \frac{1}{28\cdot 2^7} - \frac{1}{72\cdot 2^9} - \cdots\right).$$

Srinivasa Ramanujan (1914):

$$\frac{1}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^3 \frac{42\,n+5}{2^{12\,n+4}} .$$

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4} \frac{[1103 + 26390\,n]}{396^{4n}} .$$

David Chudnovsky és Gregory Chudnovsky (1989):

$$\frac{1}{\pi} = 12\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(6n)!}{(n!)^3(3n)!}\frac{13591409 + n\,545140134}{(640320^3)^{n+1/2}}$$

(Minden újabb tag hozzávétele kb. 15 újabb pontos jegyét adja π-nek.)

Jonathan Borwein és Peter Borwein (1989):

$$\frac{1}{\pi} = 12\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(6n)!}{(n!)^3(3n)!}\frac{(A+nB)}{C^{n+1/2}},$$

ahol

$$A := 212175710912\sqrt{61} + 1657145277365$$
$$B := 13773980892672\sqrt{61} + 107578229802750$$
$$C := [5280(236674 + 30303\sqrt{61})]^3.$$

(Minden újabb tag hozzávétele kb. 31 újabb pontos jegyét adja π-nek.)

David Bailey, Peter Borwein és Simon Plouffe (1996):

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i}\Big(\frac{4}{8\,i+1}-\frac{2}{8\,i+4}-\frac{1}{8\,i+5}-\frac{1}{8\,i+6}\Big).$$

Megjegyzés: irracionalitás; transzcendencia; 1761 Lambert; 1882 Lindemann

h) $e \approx 2,71\dots$ $(e \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$; folyamatos kamatozás; Euler-szám.)

Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e. \tag{1}$$

Megoldás. Jelöljük a (1) sor n-edik részletösszegét s_n-nel, azaz

$$(2) \quad s_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\,.$$

Be fogjuk látni, hogy $s_n \to e$, ha $n \to \infty$.

A binomiális tétel alkalmazásával adódik, hogy

$$
\begin{aligned}
&\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
&= 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} \\
&+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \cdots \\
&+ \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{n!}\frac{1}{n^n} \\
&= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{n^2}\cdot\frac{1}{2!} \\
&+ \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}\cdot\frac{1}{3!} + \cdots \\
&+ \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{n^n}\cdot\frac{1}{n!} \\
&\le 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} = s_n,
\end{aligned}
$$

tehát azt kaptuk, hogy

$$
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le s_n. \tag{3}
$$

Most rögzítsünk egy $k \in \mathbb{N}^+$ számot. Legyen $n > k$, és $(1+\frac{1}{n})^n$-nek a binomiális kifejtéséből hagyjuk el a $(k+1)$-edik utáni tagokat. Ezzel az $(1+\frac{1}{n})^n$ kifejezést csökkentjük, azaz

$$\begin{aligned}
&\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1+1+\frac{n(n-1)}{n^2}\frac{1}{2!} \\
&+\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}\cdot\frac{1}{3!}+\cdots+ \\
&+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\frac{1}{k!} \\
&= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) \\
&+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+ \\
&+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Ha $n \to \infty$, a bal oldal határértéke e, a jobb oldalé pedig (k rögzített)

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!}\,.$$

Ebből tehát az adódik, hogy

$$e \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} = s_k. \tag{4}$$

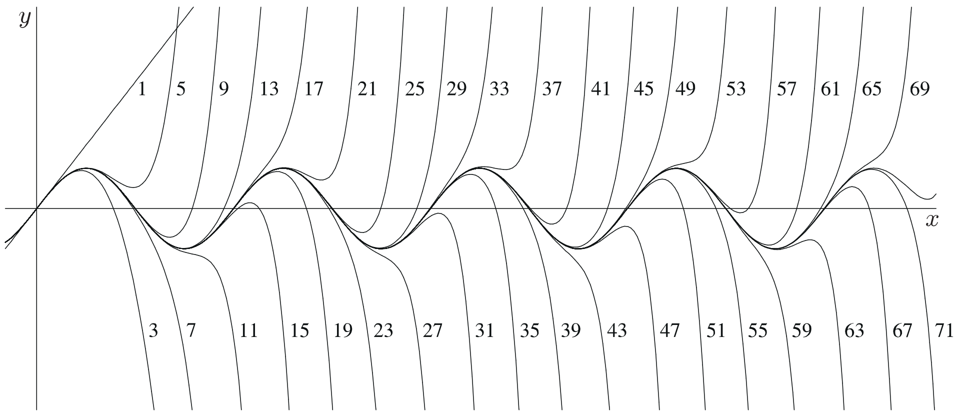
Mivel (4) minden k-ra igaz, így k helyett n-et írva és figyelembe véve (3)-at, azt kapjuk, hogy

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq s_n \leq e.$$

A rendőrelv alapján adódik, hogy $\lim_{n\to\infty} s_n = e$, azaz (1)-t sikerült belátnunk.

Megjegyzés: irracionalitás; transzcendencia ($n \cdot \sin(2\pi e n!) \to 2\pi$) $\pi + e$???

j) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots$


y
x
1
5
9
13
17
21
25
29
33
37
41
45
49
53
57
61
65
69
3
7
11
15
19
23
27
31
35
39
43
47
51
55
59
63
67
71