Vizsgatematika
(Nevezetes numerikus sorok)
2012-13. II. félév
(Bsc. mat.)

A) Definíciók, tételek (bizonyítás nélkül).

[Ezek megtalálhatók Németh Zoltán: Határérték és folytonosság, ill. Németh József: Előadások a végtelen sorokról c. könyvekben].

Végtelen sor konvergenciája, divergenciája.
Geometriai sor konvergenciája, divergenciája.
A Cauchy-féle konvergencia-kritérium sorokra;
A harmonikus sor divergenciája
A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergenciája; összege.
Abszolút konvergencia, feltételes konvergencia
Leibniz kritérium
Abszolút ill. feltételes konvergencia és az átrendezés (mindkét tétel)
Abszolút konvergens sor részsorokra bontására vonatkozó tétel.
Cauchy-szorzat; rá vonatkozó tétel.
Pozitív tagú sorokra vonatkozó konvergenciakritériumok (majoráns, minoráns, gyök-, hányados-, integrál-kritériumok legalább egy alakja).
Függvénysorozatok pontonkénti és egyenletes konvergenciája.
A Dirichlet-féle konvergencia-kritérium.
Függvénysorok pontonkénti és egyenletes konvergenciája.
Majoráns kritérium függvénysorokra.
Hatványsorok definíciója, konvergencia-sugár
Cauchy-Hadamard-féle tétel.
Hatványsor egyenletes konvergenciája.
Abel tétele.
Hatványsor összegfüggvényének tulajdonságai (folytonosság, differenciálhatóság, integrálhatóság.)
Taylor sor; nevezetes Taylor-sorok ($e^x, \sin x, \cos x, \ln(1+x), (1+x)^{\alpha}$).
Fourier-sor fogalma, Euler-Fourier képletek.
Parseval-formula trigonometrikus rendszerre.
A prímszámok reciprokaiból álló sor divergenciája.
Az e szám definíciója; irracionalitása; végtelen sor előállítása. A $\sqrt{2}$ előállítása a binomiális sorral.
A πelőállítása az arctg$x$ sorának, ill. az $\arcsin x$ sorának segítségével.
A Liouville-szám; transzcendens volta.

B) Tételek bizonyítással együtt

[A bizonyítások az <u>előadáson elhangzanak</u>, ill. Németh József: Előadások a végtelen sorokról c. könyvben megtalálhatók].

- A geometriai sor konvergenciája.
- A geometriai sor alkalmazásai.
- A harmonikus sor divergenciája.
- A harmonikus sorral kapcsolatos néhány érdekesség (részletösszegei nem egészek; egy adott számjegyet tartalmazó tagok elhagyásával kapott sor konvergens).
- A $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ sor konvergenciája, összege; egy átrendezése.
- A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergenciája.
- A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ bizonyítása "elemi módszerrel."
- A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ $(p > 1)$ sor konvergenciája.
- A prímszámok reciprokaiból álló sor divergenciája.
- Az $e = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ bizonyítása.

– Az e irracionalitásának bizonyítása.
– A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ bizonyítása Fourier-sorral.
– A Liouville-féle szám transzcendens voltának bizonyítása.
– $\sqrt{2}$ előállítása binomiális sorral.
– π előállítása arcctg$x, ill.$arcsin$x$ sorai segítségével.
– A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ sor konvergenciája (a segédtételek bizonyítása is).

C) Példák (Egy részük az előadáson kerül megoldásra, ill. megoldással együtt az összes megtalálható Németh József: Előadások a végtelen sorokról c. könyvben - többségük a Feladattár fejezetben).

1. A $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ sor "összegei"
2. A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ sor összege.
3. A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ sor összege.
4. Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}{e^n}$ sor?
5. $\sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{1}{2^p 5^q} = 2,5$ bizonyítása
6. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \dots$ összege.
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log_2^p n}$ divergenciája ($p \leq 1$); konvergenciája ($p > 1$).
8. $\sum_{|}^{\infty}(-1)^n \ln(1 + \frac{1}{n})$ konvergenciája, abszolút konvergencia.
9. Bizonyítsuk be, hogy a következő sorok konvergensek

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3\sqrt{n}};\quad b)\ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}};\quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{1}{n} - \ln(1+\frac{1}{n})\Big]$$

10. Bizonyítsuk be, hogy van két szomszédos négyzetszám, amelyek közé legalább 10^6 prímszám esik.
11. Határozzuk meg a köv. függvények Fourier-sorait.
    a) $f(x) = x^2; \quad x \in [-\pi, \pi];$
    b) $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$, ha $0 < x \leq 2\pi$
    c)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad 0 < x < \pi \\ 0, & \text{ha} \quad 0 = x \\ -1, & \text{ha} \quad -\pi \leq x < 0. \end{cases}$$

12. Határozzuk meg az alábbi sorok összegét
    a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n}{5^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+7n+10}$; c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{9^n}{(2n)!}$; e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{(2n)!}$
13. $y'' + xy = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ megoldása

Szeged, 2013. április 08.

Németh József