Vizsgatematika

(Nevezetes numerikus sorok)
2011-2012. II. félév
(Levelezők)

A) Definíciók, tételek (bizonyítás nélkül). (A jegyzetben mind megtalálható) (Oldalszám feltüntetve.)

Végtelen sor konvergenciája, divergenciája. (5.)
Geometriai sor konvergenciája, divergenciája. (6.)
A Cauchy-féle konvergencia-kritérium sorokra. (23.)
A harmonikus sor divergenciája. (22.)
A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergenciája; összege. (45., 46., 54.)
Abszolút konvergencia, feltételes konvergencia. (30., 31.) Leibniz kritérium. (34.)
Abszolút ill. feltételes konvergencia és az átrendezés (mindkét tétel). (37.) Abszolút konvergens sor részsorokra bontására vonatkozó tétel.(30.)
Pozitív tagú sorokra vonatkozó konvergenciakritériumok (majoráns, minoráns, gyök-, hányados-, integrál-kritériumok legalább egy alakja). (33., 19; 20. 24.)
Hatványsorok definíciója, konvergencia-sugár (76.)
Hatványsor összegfüggvényének tulajdonságai (folytonosság, differenciálhatóság, integrálhatóság.) (80, 81)
Taylor sor; nevezetes Taylor-sorok ($e^x, \sin x, \cos x, \ln(1+x), (1+x)^\alpha$). (102, 103)
A prímszámok reciprokaiból álló sor divergenciája (62., 63)
Az e szám definíciója; irracionalitása; végtelen sor előállítása.(67.-71.)
A $\sqrt{2}$ előállítása a binomiális sorral. (80.)
A πelőállítása az $\operatorname{arctg} x$ sorának, ill. az $\arcsin x$ sorának segítségével. (81., 83.)
A π irracionalitása. (87.)
A Liouville-szám; transzcendens volta. (90., 91)

B) Tételek bizonyítással együtt
[A bizonyítások az előadáson elhangzanak, vagy a jegyzetből megtanulhatók.].

A geometriai sor konvergenciája.
A geometriai sor alkalmazásai (a végtelen tizedestörtek; Koch-féle hópehely.)
A harmonikus sor divergenciája (legalább 3 féle bizonyítás).

A harmonikus sorral kapcsolatos néhány érdekesség (*részletösszegei nem egészek*; egy adott számjegyet tartalmazó tagok elhagyásával kapott sor konvergens).
A $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ sor konvergenciája, összege; egy átrendezése.
A $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ sor konvergenciája (legalább 3 féle bizonyítás).
A $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ bizonyítása "elemi módszerrel."
A $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ $(p>1)$ sor konvergenciája.
A prímszámok reciprokaiból álló sor divergenciája.
Az $e=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ bizonyítása.
Az e irracionalitásának bizonyítása.

C) Példák (Többségük az előadáson kerül megoldásra, ill. megtalálhatók kidolgozva a jegyzetben).

1. A $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ sor "összegei"
2. A $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ sor összege.
3. A $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ sor összege.
4. $\sum_{p,q=0}^{\infty}\frac{1}{2^p5^q}=2,5$ bizonyítása.
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\log_2^p n}$ divergenciája $(p\le 1)$; konvergenciája $(p>1)$.
6. $\sum_{|}^{\infty}(-1)^n\ln(1+\frac{1}{n})$ konverges; abszolút konvergencia.
7. Bizonyítsuk be, hogy van két szomszédos négyzetszám, amelyek közé legalább 10^6 prímszám esik.
8. Határozzuk meg az alábbi sorok összegét (A jegyzet "Feladatai" rovatában kidolgozva megtalálhatók a 125-129. oldalon).
   a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{5^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+7n+10}$; c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$;
   d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{9^n}{(2n)!}$; e) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{(2n)!}$

Szeged, 2012. február 14.

Jegyzet: Németh József: Előadások a végtelen sorokról (Polygon 2002)
Ajánlott:

Leindler László: Analízis (Polygon)
Németh Zoltán: Határérték és folytonosság

Németh József