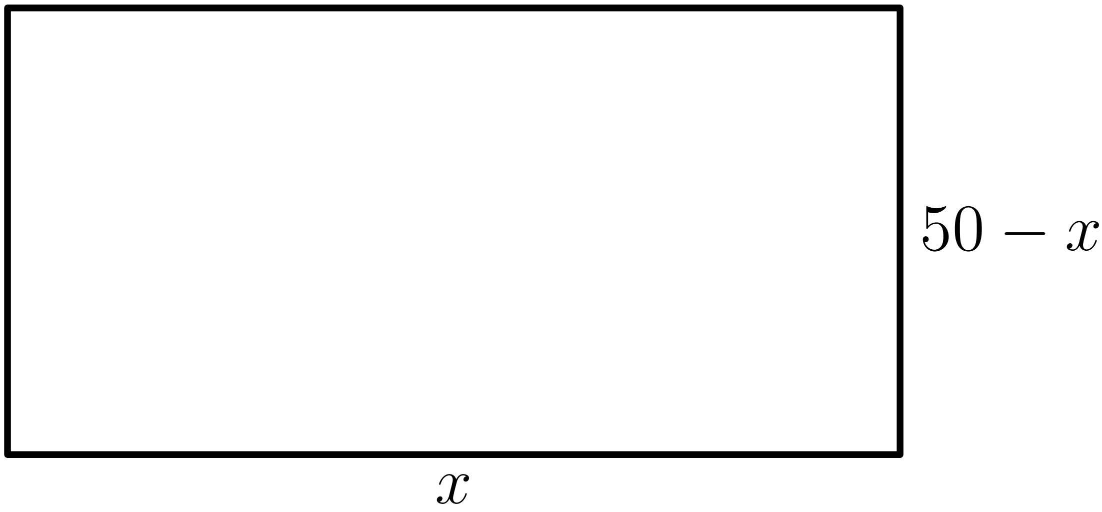
Szélsőérték-problémák a mindennapi életben

Dr. Németh József
SZTE TTIK Bolyai Intézet
Analízis Tanszék

http://www.math.u-szeged.hu/∼nemethj

1.a) **A 100 m kerületű téglalap alakú "kertek" közül melyiknek a területe maximális?**



$$T(x) = x(50 - x)$$

0) $T(x) = -x^2 + 50x$ másodfokú függvény. Maximuma a két zéróhely számtani közepe.

Megoldás: $x = 25$ (négyzet).

00) Tudjuk: $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, ha $a, b \geq 0$. És "="$\Leftrightarrow$ ha $a = b$.

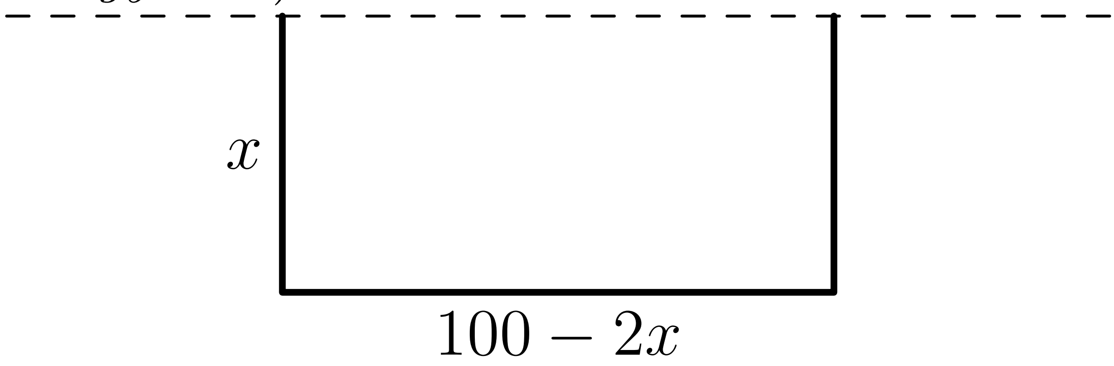
Így $x(50 - x) \leq \left(\frac{x+(50-x)}{2}\right)^2 = 25^2$.

A maximum akkor van, ha $x = 50 - x$, azaz $x = 25$.

Megjegyzés. Ekkor fel is veszi ezt a maximum értéket (ami most a 25^2).

1.b) **Ugyanaz a feladat, mint az előző, csak a téglalap egyik oldala már adott (pl. fal),**

ahhoz nem kell kerítés. (*Megj.: ekkor is négyzet??*)



$$T(x) = x(100 - 2x)$$

Nézzük csak a 00) típusú megoldást:

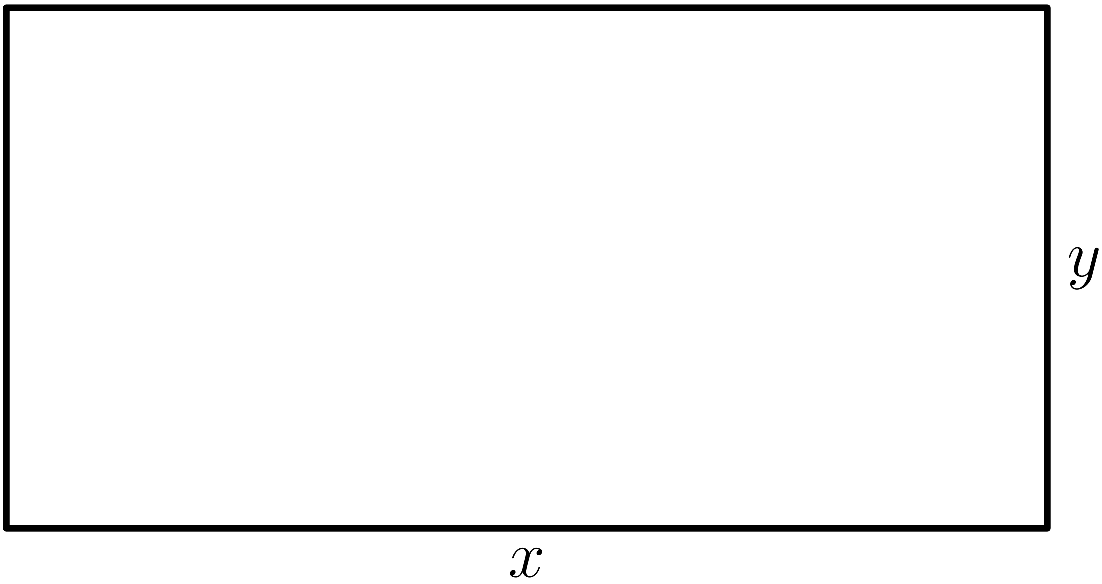
$$T(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x(100 - 2x).$$

$$2x(100 - 2x) \leq \left(\frac{2x + (100 - 2x)}{2} \right)^2 = 50^2.$$

$$" = " \Leftrightarrow 2x = 100 - 2x \Rightarrow x = 25.$$

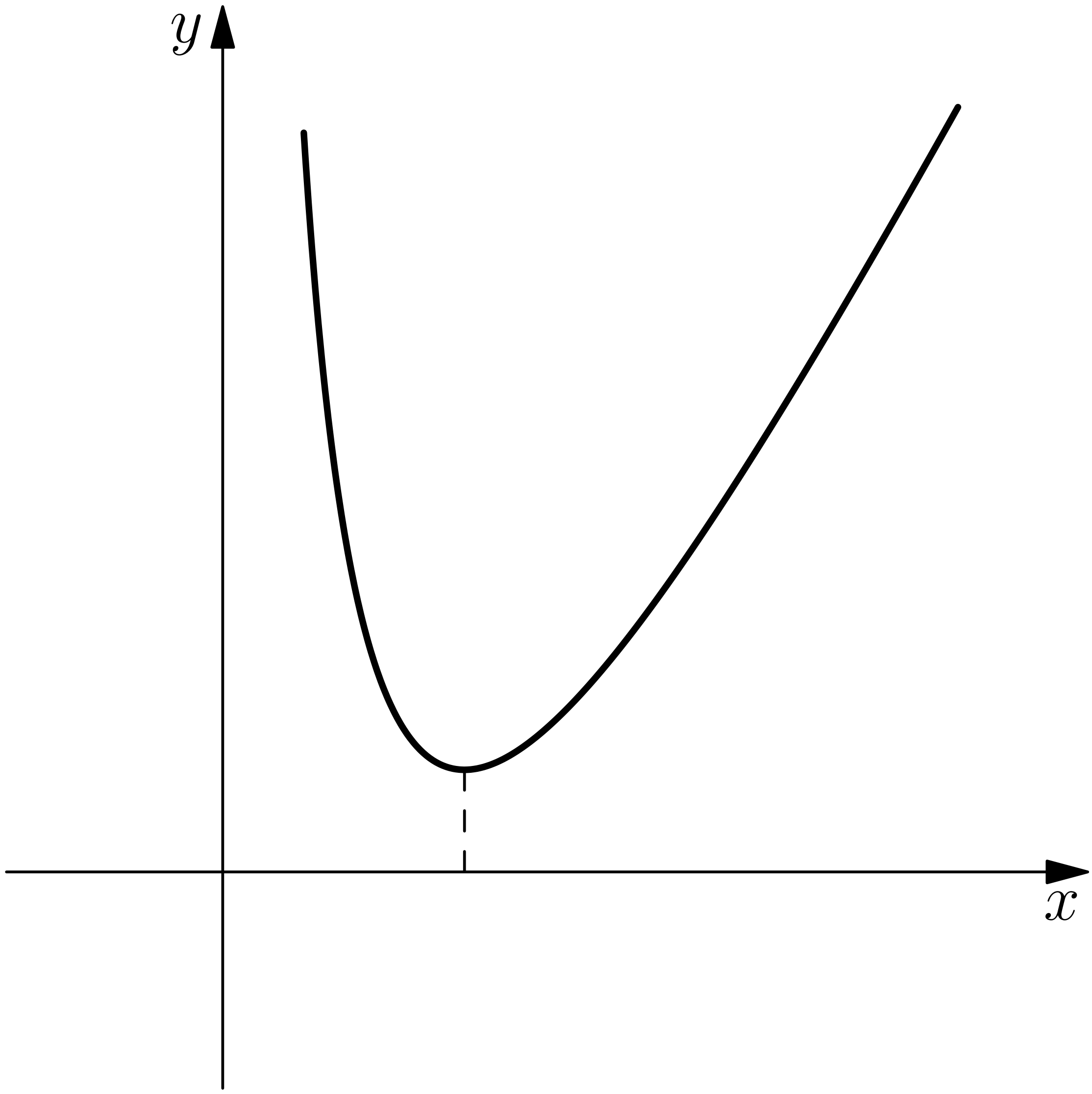
Tehát az oldalak: 25, ill. 50 m.

2. **Legyen a terület adott: 100 m^2. Melyik téglalap a minimális kerületű?**



$$xy = 100 \Rightarrow y = \frac{100}{x} \Rightarrow k = \frac{200}{x} + 2x.$$

0) A ”függvénytani” megoldás most nehéz (pl. differenciálás).



00)

$$\frac{\frac{200}{x}+2x}{2} \geq \sqrt{\frac{200}{x}\cdot 2x} = \sqrt{400} = 20.$$

$$\text{"} = \text{"} \Leftrightarrow \frac{200}{x} = 2x \Leftrightarrow x = 10 \text{ (négyzet)}$$

Konklúzió: Ha két mennyiség összege konstans, akkor a szorzat maximális, ha egyenlők; ha a szorzat konstans, akkor az összeg minimális, ha egyenlők.

3. **Egy bútorasztalos egy mahagóniültetvényről szerzi be a munkájához szükséges alapanyagot. Naponta 5 bútort készít el. A beszállítói egy konténernyi fát 5000 dollárért juttatnak el hozzá (függetlenül attól, hogy mennyi fa van a konténerben). A raktározási költség 10 dollár egységenként és naponta, ahol az egység az egy bútor elkészítéséhez szükséges alapanyag mennyisége. Mennyi faanyagot rendeljen egy-egy alkalommal, és milyen gyakran kérje a kiszállítást annak érdekében, hogy minimalizálni tudja a költségeket?** (*Igazi real-life.*)

Megoldás. Ha x naponként kér szállítást, akkor $5x$ mennyiségű alapanyagot kell rendelnie, hogy a rendelési ciklusban mindvégig elegendő anyaga legyen. Az *átlagosan* raktározott mennyiség hozzávetőleg a rendelt mennyiség fele, vagyis $5x/2$. Ezért egy-egy ciklusban a szállítási és raktározási költség együttesen:

egy ciklusbeli költség = szállítási költség + raktározási költség;

egy ciklusbeli költség =

$= \ 5000 \ +$	$\left(\frac{5x}{2}\right) \ \cdot$	$x \ \cdot$	10
száll. költség	átlagosan rakt. mennyiség	rakt. napok száma	napi rakt. díj

A $c(x)$ *átlagos napi költséget* úgy számítjuk ki, hogy a ciklusra eső költséget elosztjuk a ciklusban lévő napok számával, x-szel.

$$c(x) = \frac{5000}{x} + 25x, \quad x > 0.$$

Ld.: a 2. feladat ötlete.
Nyilván

$$\frac{5000}{x} + 25x \geq 2\sqrt{5000 \cdot 25} \text{ (konstans).}$$

Így $c(x)$ minimális, ha "=" van, azaz

$$\frac{5000}{x} = 25x \Leftrightarrow 200 = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{200} \approx 14,14.$$

Tehát 14 naponként kell rendelnie.

3*. **Antonio has \$ 5.00 to spend on a lunch consisting of hamburgers (\$ 1.50 each)**

and French fries ($ 1.00 per order). Antonio's satisfaction from eating x_1 hamburgers and x_2 orders of French fries is measured by a function $U(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$. How much of each type of food should he purchase to maximize his satisfaction (assume that fractional amounts of each food can be purchased)?

Megoldás.

$$(*) \qquad 1,5x_1 + x_2 = 5$$

$$\sqrt{1,5x_1x_2} \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow \sqrt{1,5}\sqrt{x_1x_2} \leq \frac{5}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x_1x_2} \text{ maximális, ha } \text{''} = \text{''} \text{ van } \Leftrightarrow$$

$$1,5x_1 = x_2$$

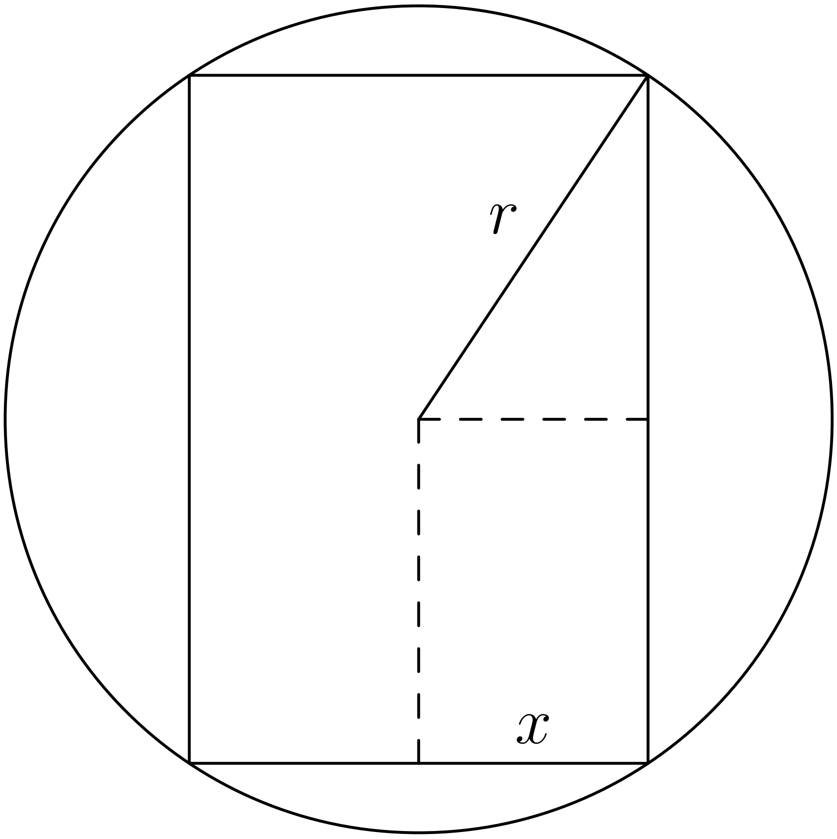
Figyelembe véve a $(*)$ egyenletet, kapjuk:

$$x_1 = \frac{5}{3}, \quad x_2 = \frac{5}{2},$$

azaz $\frac{5}{3}$ hamburger és $\frac{5}{2}$ sült krumpli az optimális adag.

Megj.: Mary, Jennifer.

4.a) **Adott körbe írjunk maximális területű téglalapot (a "leesett" rész legyen minimális).** (*Medál*)



$$T(x) = 2x \cdot 2\sqrt{r^2 - x^2} = 4x\sqrt{r^2 - x^2}$$
$$\tilde{T}(x) = x\sqrt{r^2 - x^2}.$$

0)

$$x\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{x^2(r^2 - x^2)} \leq \frac{x^2 + r^2 - x^2}{2} =$$
$$= \frac{r^2}{2}$$

$$\text{"} = \text{"} \Leftrightarrow x^2 = r^2 - x^2 \Leftrightarrow x = \frac{r}{\sqrt{2}} \text{ (négyzet)}$$

00)

$$\tilde{T}^2 = x^2(r^2 - x^2)$$

$$f(t) = t(r^2 - t)$$

$$t_0 = \frac{r^2}{2} \Rightarrow x = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

000) Differenciálás (de $\tilde{T}^2(x)$ a jobb).

4.b) **Adott gömbbe írjunk maximális térfogatú hengert.** (A "leesett" hulladék minimális legyen.) (*Kepler (1615); Jó bor (1610); "Barrel" probléma; medál*)

I. "**Megoldás.**": ld. előző példa eredménye (ábra ugyanaz)!!!

II.

$$V(x) = x^2\pi \cdot 2\sqrt{r^2 - x^2} = 2\pi x^2\sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\tilde{V}(x) = x^2\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{x^4(r^2 - x^2)}$$

$$\approx\!V(x) = x^4(r^2 - x^2).$$

0) Függvénytan (nem parabola!!!)

00) Differenciálás $(\overset{\approx}{V}(x))$

000) Számtani-mértani közép???

$$\overset{\approx}{V}(x) = 4 \cdot \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x^2}{2}(r^2 - x^2)$$

Itt **3** elem összege konstans.

Kérdés (analógia):

$$(*) \qquad \frac{a+b+c}{3} \overset{?}{\geq} \sqrt[3]{abc}, \;\; a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0.$$

A $(*)$ **bizonyítása**:

Legyen a, b, c, d (≥ 0) először (4 elemre).

$$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2} \geq \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{cd}}{2} \geq$$
$$\geq \sqrt[4]{abcd}.$$

Most:

$$\underbrace{\frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4}} \geq \sqrt[4]{abc\frac{a+b+c}{3}}$$

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[4]{abc} \cdot \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{1/4} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{3/4} \geq \sqrt[4]{abc} \Rightarrow$$

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

Kell még az "=" feltétele (fontos!). Tegyük fel, hogy $a \neq b$. Ekkor

$$\frac{a+b+c}{3} = \frac{\frac{a+b}{2}+\frac{a+b}{2}+c}{3} \overset{!}{>} \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{ab}+c}{3} \geq$$
$$\geq \sqrt[3]{abc}.$$

Tehát "=" csak akkor lehet, ha minden elem ugyanaz.

Vissza 4.b)-hez:

$$\overset{\approx}{V}(x) = 4 \cdot \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \cdot (r^2 - x^2).$$

Így

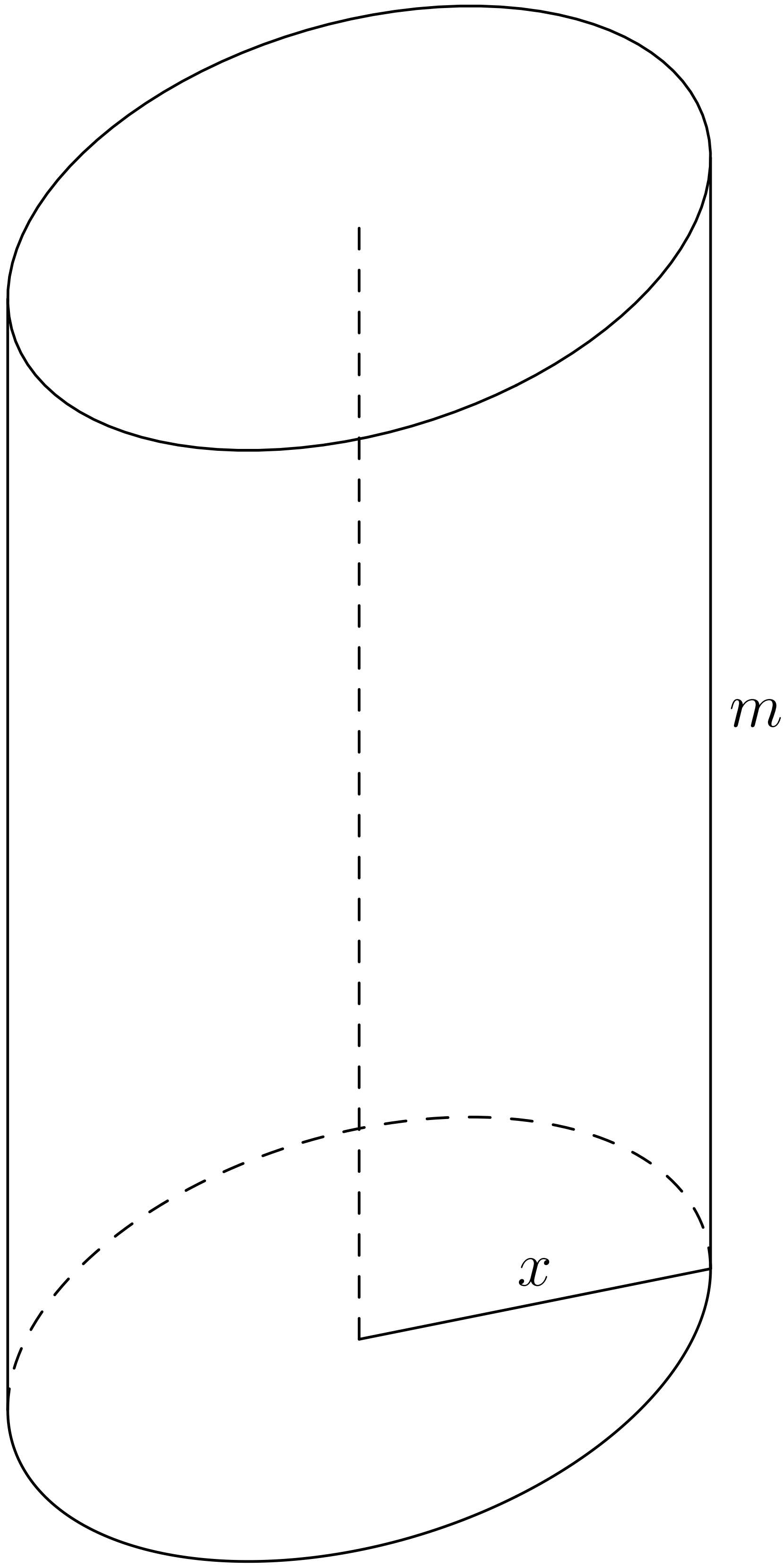
$$\frac{x^2}{2}\cdot\frac{x^2}{2}(r^2-x^2) \leq \left(\frac{\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}+r^2-x^2}{3}\right)^3 = \left(\frac{r^2}{3}\right)^3.$$

Tehát a szorzat akkor maximális, ha "=" van, azaz

$$\frac{x^2}{2} = r^2 - x^2 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 = r^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{2}{3}}r$$

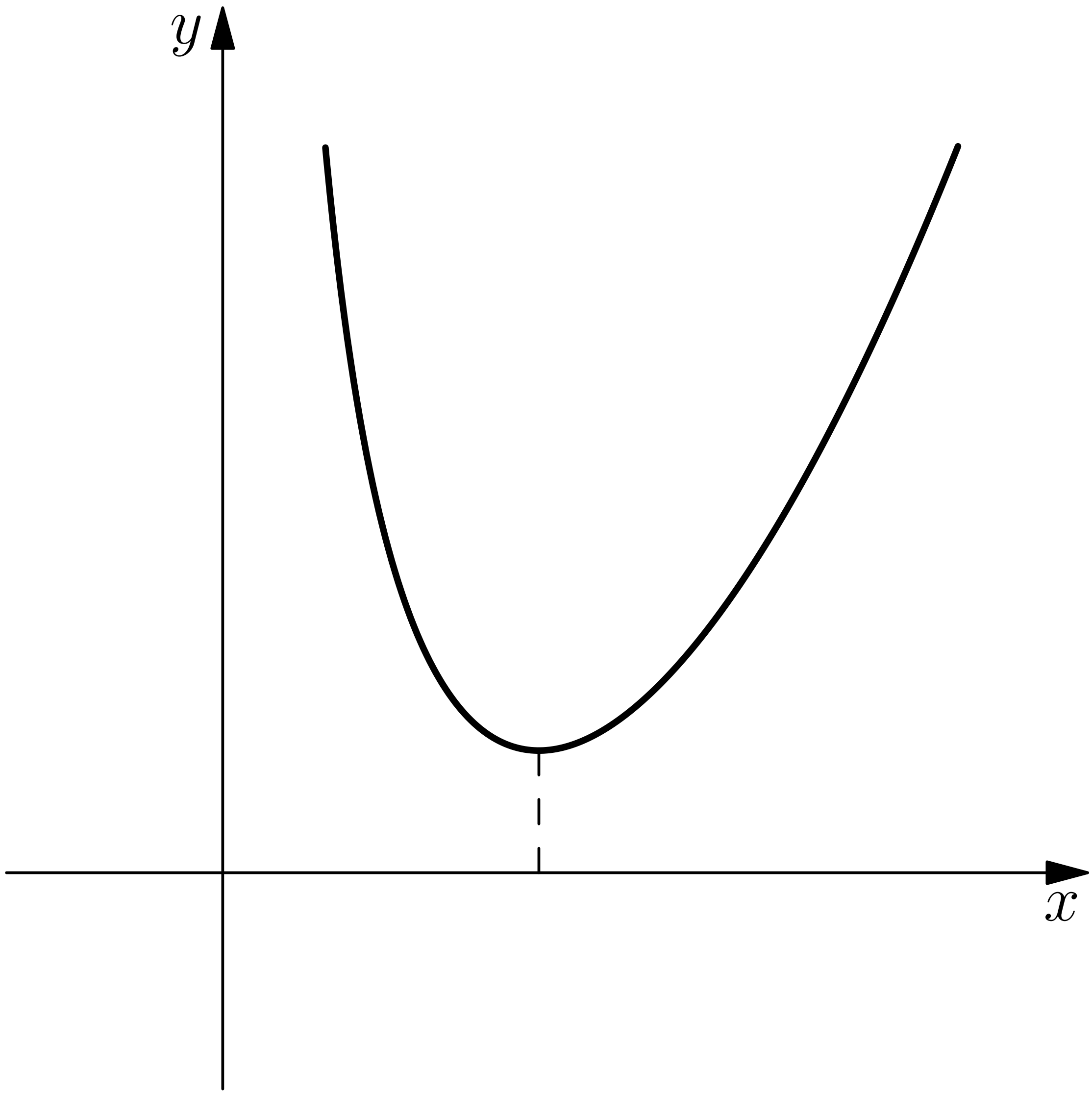
(tehát $\neq \frac{r}{\sqrt{2}}$, kicsit "ducibb" a megoldás, mert $\sqrt{\frac{2}{3}} > \frac{1}{\sqrt{2}}$.)

5. **Milyen méretű legyen az 1 dm^3 térfogatú henger alakú konzervdoboz, hogy a legkevesebb anyag legyen szükséges elkészítéséhez?**


m
x

$$x^2\pi m = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{x^2\pi}$$

$$F(x) = 2x^2\pi + 2x\pi \cdot m = 2x^2\pi + 2x\pi \frac{1}{x^2\pi} = 2x^2\pi + \frac{2}{x}$$



$$F(x) = 2x^2\pi + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \geq 3\sqrt[3]{2\pi}.$$

$$,,=\text{''}: 2x^2\pi = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} \qquad \textit{Jani bácsi}$$

$$2x = \frac{2}{\sqrt[3]{2\pi}};\ m = \frac{1}{(\sqrt[3]{(2\pi)^2})^{-1}\pi} = \frac{\sqrt[3]{(2\pi)^2}}{\pi} =$$
$$= \ldots = \frac{2}{\sqrt[3]{2\pi}}.$$

Tehát a henger átmérője = magasságával (egyenlő-oldalú henger). (*Gomba*)

3 többváltozós probléma

6.a) **Milyen méretű legyen a téglatest formájúra csomagolt főzőmargarin ahhoz, hogy minimális csomagolóanyag legyen szükséges?** (Legyen 1 dm^3 a térfogat.)

$$xyz = 1$$

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= 2xy + 2yz + 2xz = \\ &= 2xy + (2y+2x)z = \\ &= 2xy + (2y+2x)\frac{1}{xy} = 2xy + \frac{2}{x} + \frac{2}{y}. \end{aligned}$$

Így a $g(x,y) = 2xy + \frac{2}{x} + \frac{2}{y}$ függvény minimuma kell.

$$2xy + \frac{2}{x} + \frac{2}{y} \geq 3\sqrt[3]{8} = 6$$

Nyilván minimális az összeg, ha "=" van, azaz $2xy = \frac{2}{x} = \frac{2}{y} \Rightarrow x = y, 2x^2 = \frac{2}{x} \Rightarrow x = 1$. Tehát $x = 1, y = 1, z = 1$, azaz kocka alakú az optimális.

6.b) **Készítsünk téglatest alakú díszdobozt úgy, hogy az "alaplapja" 1000 Ft/dm^2, "fedőlapja" 5000 Ft/dm^2, a többi lap 2000 Ft/dm^2 költséggel készüljön. Milyen méret esetén lesz a minimális a költség (legyen a térfogata 8 dm^3).**

$$xyz = 8$$

$$F_k(x, y, z) = xy \cdot 1 + xy \cdot 5 + 2yz \cdot 2 + 2xz \cdot 2 = \\ = 6xy + 4yz + 4xz = 6xy + (4x + 4y)z.$$

Így

$$g_k(x, y) = 6xy + (4x + 4y)\frac{8}{xy} = 6xy + \frac{32}{x} + \frac{32}{y}.$$

De $6xy + \frac{32}{x} + \frac{32}{y} \geq 3\sqrt[3]{6 \cdot 32^2}$.
A minimum akkor van, ha "=", azaz

$$6xy = \frac{32}{x} = \frac{32}{y}.$$

Tehát $x = y$ és $6x^3 = 32, x = \sqrt[3]{\frac{32}{6}} = \sqrt[3]{\frac{16}{3}} \approx 1,7471$. Tehát $x \approx 1,7471, y \approx 1,7471, z \approx 2,62$

lesz az optimális méret (négyzet alapú; magassága nagyobb, mint az alap éle).

6.c) **A posta belföldi forgalomban csak olyan küldeményeket vesz fel, amelyek hosszának és körméretének összege $\leq 2m$. Milyen méretű legyen egy téglatest alakú csomag, amely a legnagyobb térfogatú?**

$$x + 2y + 2z = 2$$

$$V(x, y, z) = xyz = xy\frac{2 - x - 2y}{2}$$

$$\tilde{V}(x, y) = xy(2 - x - 2y) = \frac{1}{2} \cdot x2y(2 - x - 2y) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^3$$

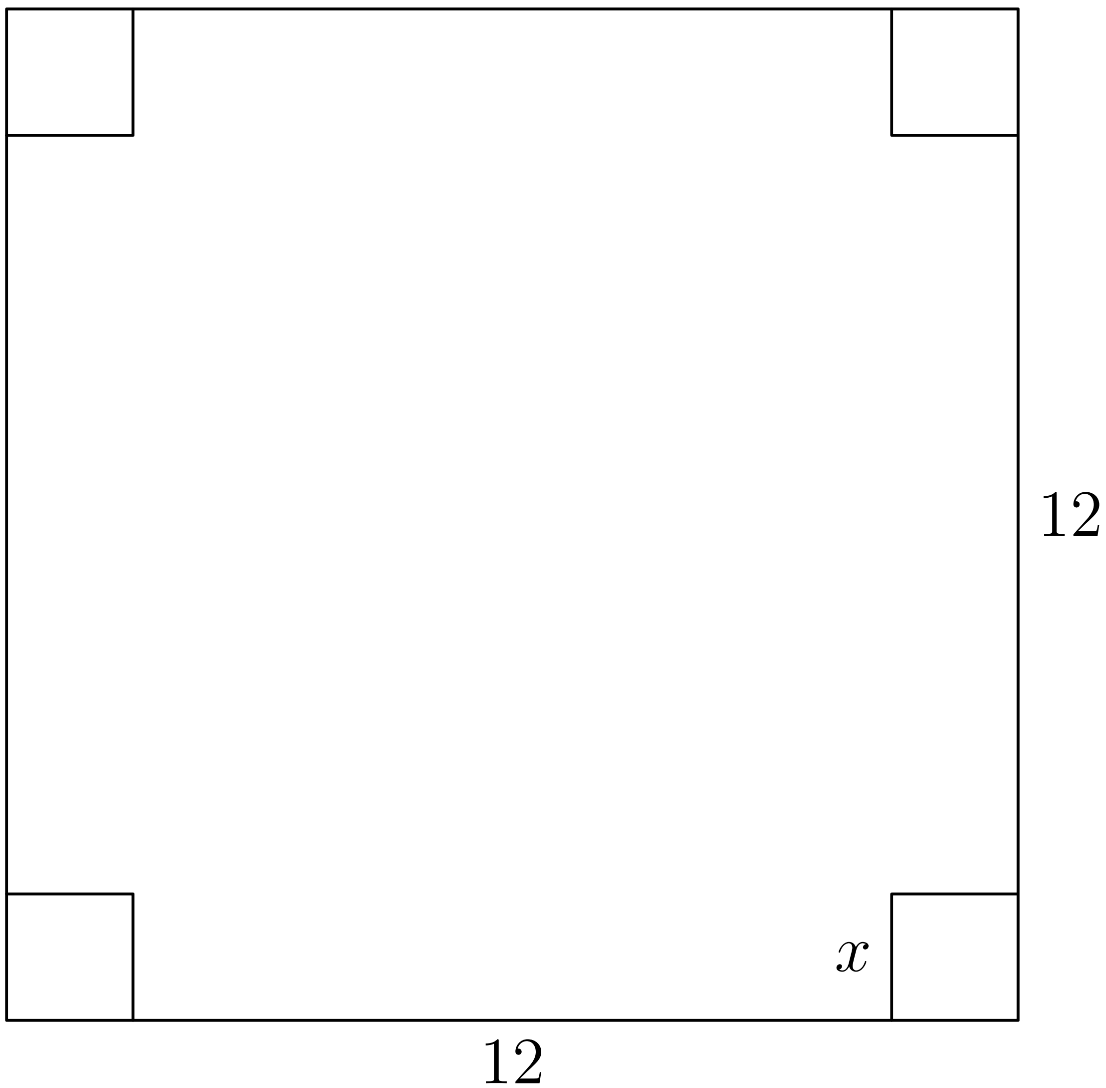
$$" = " \Leftrightarrow x = 2y = 2 - x - 2y$$

$$x = \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{1}{3}$$

$$z = \frac{1}{3}$$

7.a) **Egy 12 dm oldalú négyzet alakú kartonpapírból a sarkoknál kirajzolt négyzetek kivágása után a szélek felhajtásával dobozt készítünk. Milyen oldalhosszúságú négyzeteket kell kivágni ahhoz, hogy a kapott doboz térfogata maximális legyen?**



$$\begin{aligned} V(x) &= (12-2x)(12-2x)\cdot x = \\ &= \frac{1}{4}\cdot 4x(12-2x)(12-2x) \le \\ &\le \frac{1}{4}\left(\frac{4x+(12-2x)+(12-2x)}{3}\right)^3 \le \frac{1}{4}\cdot 8^3. \end{aligned}$$

$$\text{"} = \text{"} \Leftrightarrow 12-2x = 4x \Rightarrow x = 2.$$

Tehát 2 dm oldalú négyzeteket kell kivágni. (*Már unalmas, de nézzük a következőt.*)

7.b*) **Ugyanaz a feladat, mint előbb, csak a kiinduló kartonpapír mérete:** 2 m x 1 m.

$$\begin{aligned} V(x) &= (1-2x)(2-2x)x = 2(1-x)(1-2x)x = \\ &= \frac{2}{3}\cdot 3x(1-x)(1-2x) \le \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3. \end{aligned}$$

$$\text{"} = \text{"} \Leftrightarrow 3x = \underbrace{1-x = 1-2x}_{\text{soha}}.$$

Így nem oldható meg! **Tanulság!!!** (nem éri el a jobb oldali konstanst) (Hoppá!)

Más megoldás!

$$V(x) = 2x(1-3x+2x^2) = 2\underbrace{\left(2x^3-3x^2+x\right)}_{g(x)}$$

Kérdés: $g(x)$ maximuma (**harmadfokú**). (Helyi maximum!!!) Hogy néz ki? (Gyökök: $0; \frac{1}{2}; 1.$)
Feladat

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x \qquad \left(0 < x < \frac{1}{2}\right)$$

maximumát meghatározni. (Differenciálással megy, de mi elemibb megoldást választunk.)
Mivel

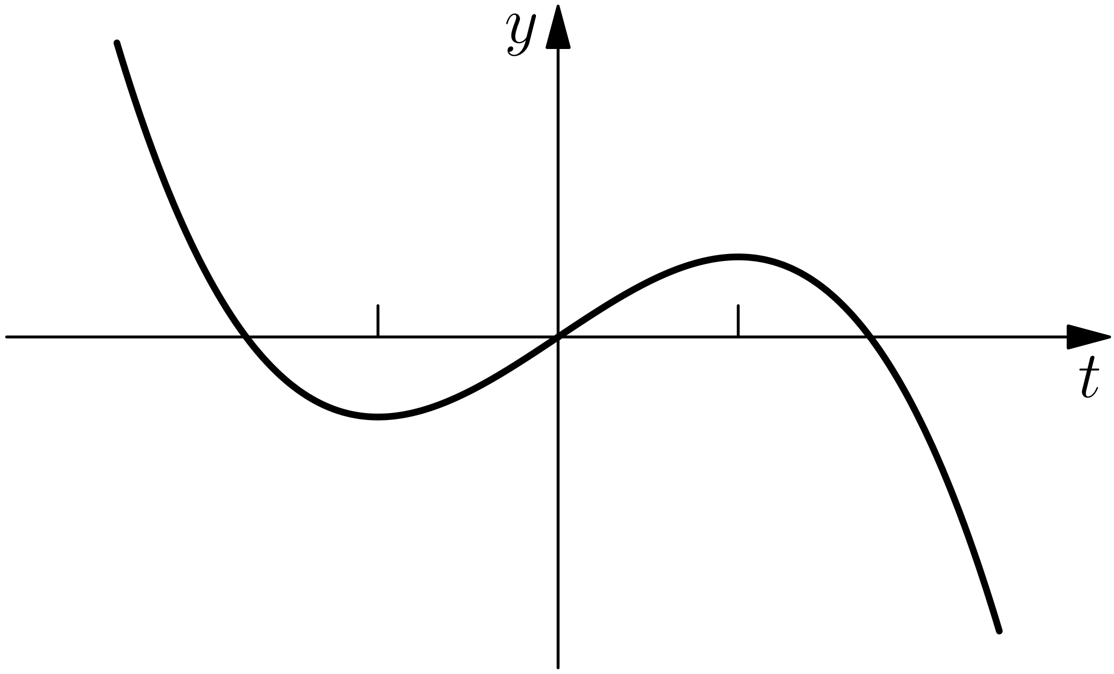
$$f(x) = 2\left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{x}{2}\right),$$

elég a

$$g(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{x}{2}$$

maximumát megkeresni.

a) $h(t) = pt - t^3$, ha $p > 0$. (*Rédei!*)



$$
\begin{aligned}
h(t) &= t(p-t^2)\\
h^2(t) &= t^2(p-t^2)^2 = t^2(p-t^2)(p-t^2) =\\
&= 4\cdot \underbrace{t^2\cdot\frac{p-t^2}{2}\cdot\frac{p-t^2}{2}}_{\text{összegük konstans.}}
\end{aligned}
$$

Tehát maximális, ha "=" $\Leftrightarrow t^2 = \frac{p-t^2}{2} \Leftrightarrow 3t^2 = p \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{p}{3}}$.
Nyilván $-\sqrt{\frac{p}{3}}$-nál pedig minimum van.
b) $\hat{h}(t) = t^3 - pt,\ p > 0$. Az előző tükörképe az x tengelyre.
Itt a maximum $-\sqrt{\frac{p}{3}}$-nál van.

c) $y = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{x}{2},\ x = t + \frac{1}{2}$.

$$y = \left(t + \frac{1}{2}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{t + \frac{1}{2}}{2} =$$
$$= t^3 + 3t^2\frac{1}{2} + 3t\frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{2}t - \frac{3}{8} +$$
$$+ \frac{t}{2} + \frac{1}{4} = t^3 - \frac{t}{4}.$$

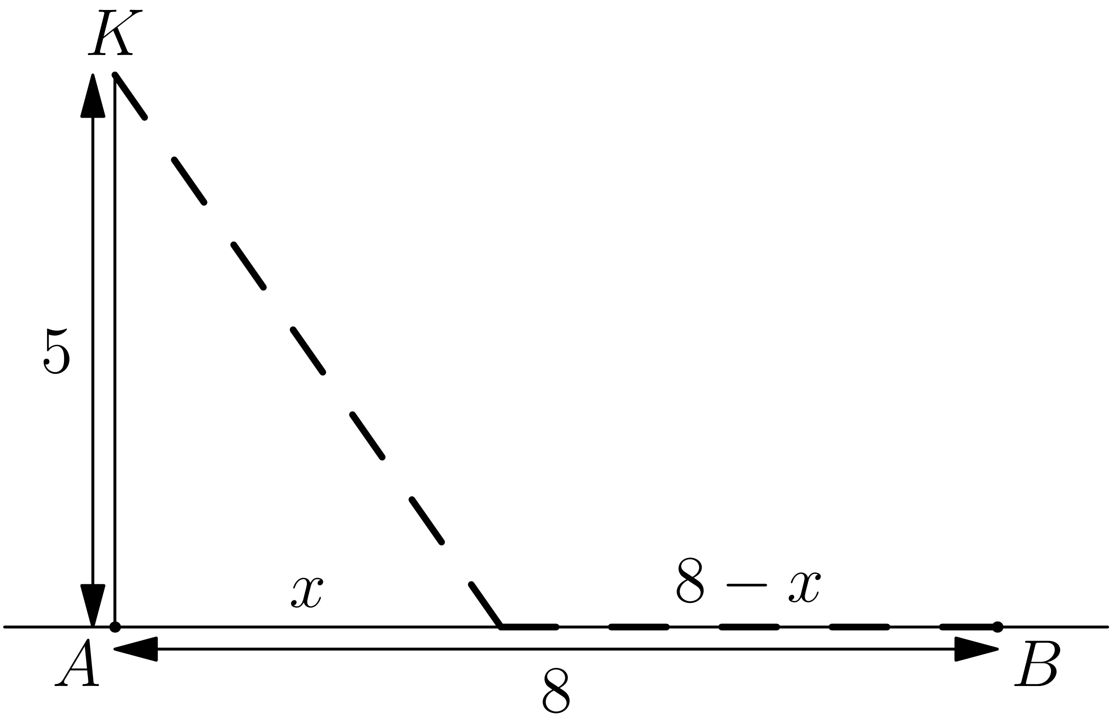
$$y_{\max} : t = -\sqrt{\frac{1}{12}},$$
$$y_{\max} : x = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Tehát $x = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 0,211$ a levágandó négyzetek oldala.

Tanulság: harmadfokúval már nehezebb. (ld. Rédei)

8. **Egy olajkút a parttól 5 km-re a tengerben működik. A parton a hozzá legközelebbi *A* ponttól egy 8 km-re fekvő *B* pontban levő finomítóba kell szállítani az olajat. A víz alatti csővezeték ára 100.000 Ft/km, a föld alattié 75.000 Ft/km. Milyen utat**

építsenek ki, hogy a költség minimális legyen?



$$f(x) = 100 \cdot \sqrt{x^2+25} + 75(8-x)$$

I. Megoldás: csak differenciálással?

$$f'(x) = 100 \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+25}} - 75 = 0 \Leftrightarrow$$

$$100x = 75\sqrt{x^2+25}$$

$$\vdots$$

$$x = \frac{15}{\sqrt{7}} \approx 5,67 \text{ km.}$$

II. Megoldás. (XVI. sz.; négyzettábla; **Kalmár L.**)

$$(u+v)^2-(u-v)^2=4uv$$

$$(u+v)^2=(u-v)^2+4uv;\ v=\frac{1}{4u}$$

$$\left(u+\frac{1}{4u}\right)^2=\left(u-\frac{1}{4u}\right)^2+1$$

$$\tilde{f}(x)=100\sqrt{x^2+25}-75x \text{ minimuma kell}$$

$$x=5\left(u-\frac{1}{4u}\right)\Rightarrow\sqrt{x^2+25}=$$

$$=\sqrt{25+25\left(u-\frac{1}{4u}\right)^2}=$$

$$=5\cdot\sqrt{1+\left(u-\frac{1}{4u}\right)^2}=5\cdot\left(u+\frac{1}{4u}\right).$$

Így

$$\tilde{f}(x)=g(u)=100\cdot 5\cdot\left(u+\frac{1}{4u}\right)-$$

$$-75\cdot 5\left(u-\frac{1}{4u}\right)=$$

$$=125u+\frac{875}{4}\cdot\frac{1}{u}\ (\textbf{szorzat konstans})$$

$$\min g(u) : 125u = \frac{875}{4} \cdot \frac{1}{u} \Rightarrow u^2 = \frac{175}{100} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = \frac{5\sqrt{7}}{10} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\min \tilde{f}(x) : 5\left(\frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{1}{4 \cdot \frac{\sqrt{7}}{2}}\right) = 5\left(\frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{7}}\right) =$$

$$= 5 \cdot \frac{14-2}{4\sqrt{7}} = 5 \cdot \frac{12}{4\sqrt{7}} = \frac{15}{\sqrt{7}} \approx 5,67 \text{ km.}$$