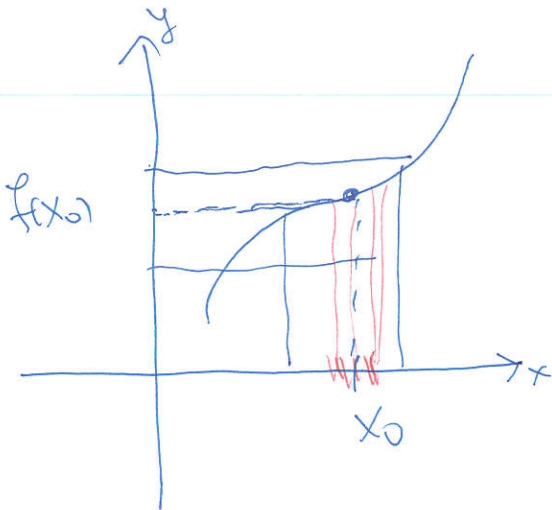


Dr. Németh József
c. egyetemi tanár

Egyenletek megoldása
felsőbb matematikai módszerekkel

Lemma tábor
2025.07.07.
SZTE Bolyai Intézet

I. Folytonosság

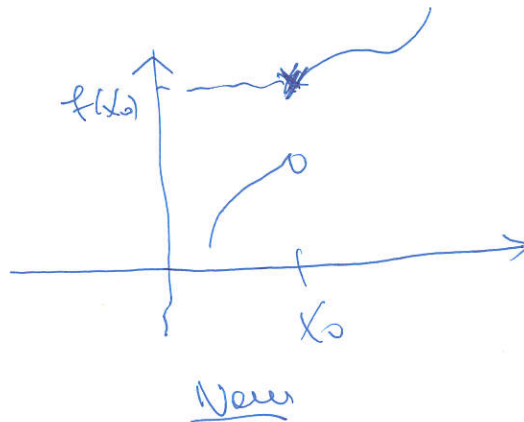
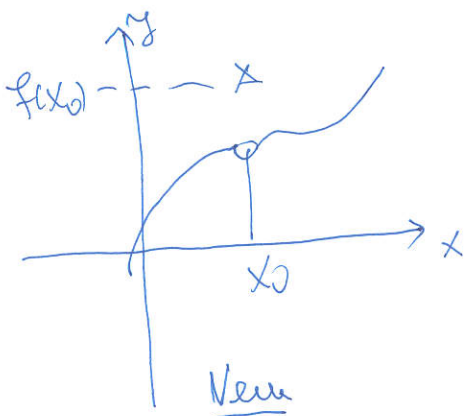


$$H: x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_0)$$

$$C: \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in D_f$$

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

(VEDS; plusz maci)



1. Kérdés: Van-e olyan széles folytonos fgv

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ rác} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irrác} \end{cases} \quad (\text{Dirichlet})$$

2. Van-e széles egy pontban?

3. Van-e olyan fgv, amely irrác-pontokban folyt, de a rác-pontokban nem (Piercelem)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \text{ irrác} \\ \frac{1}{q}, & \text{ha } x = \frac{p}{q} \quad (p, q \in \mathbb{N}, q > 0) \end{cases} \quad (\text{Szegő})$$

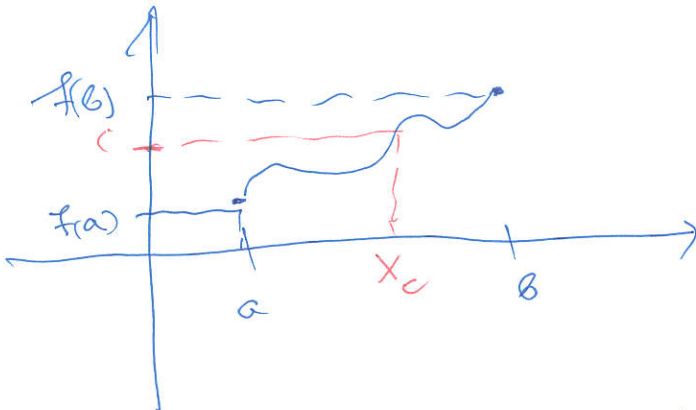
4. Van-e olyan fgv, amely rác-pontokban folyt, irrác-pontokban nem?

(Kiados)

I/-2-

Bolzano-Weierstrass tétel

Ha $f \in C_{[a,b]}$ és $f(a) < f(b)$, akkor $\forall c$ -hez
 $\exists x_c$, hogy $f(x_c) = c$



Bolzano..., B-D te-
Weierstrass., lejtőszög

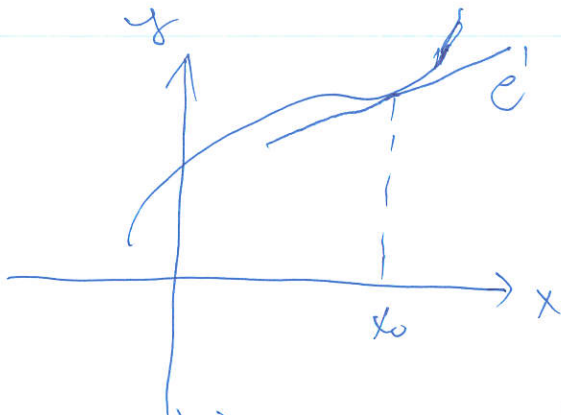
Biz. (Bolzano)

Ha f foly. \Rightarrow B-D tulajdonság
(Függvényre)

Példa (5)

(PÉLDA) \rightarrow Bolzano (5)

II. Differenciál (derivál)



$$m_e = \frac{d}{dx} f'(x_0)$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (\text{Ábra})$$

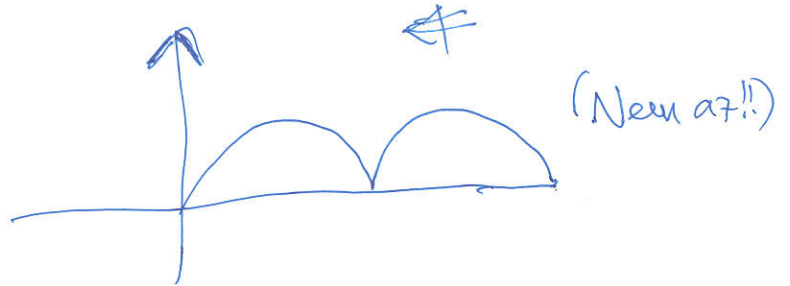
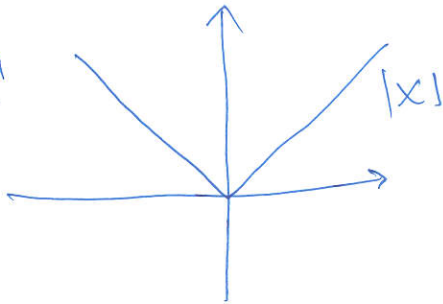
Stabilitás pl. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$. Kérvény (LÖ)

Funkció Ha $f'(x) > 0$ ($a \leq x \leq b$) $\Rightarrow f \uparrow (a, b)$
(Forsó ~~át~~ nem pontos, de megjelölés)

Levegő: Kérvény " > 0 " hisz, mint $f(x) \uparrow$

Kapcsolat a folytonossággal. Ha $f' \in D_{(a,b)} \Rightarrow f \in C_{(a,b)}$

Példa
 $f \notin D_0$



Pé. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$; $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

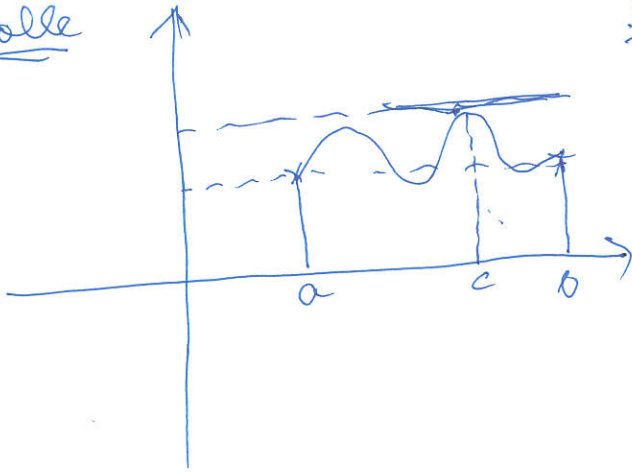
Kérdés Van-e olyan fgv, amelyre $f'(x) = \sqrt{\sin x}$

(BUTARRAU - fel.)

(5)

Rolle tétel; Lagrange-féle tétel

Rolle



Tétel

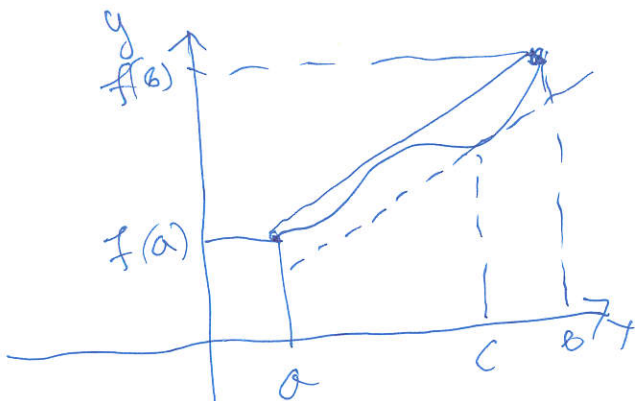
Legyen $f \in C[a,b]$ és diff. hathat
 $a \in (a,b)$ -n; és
 legyen $f(a) = f(b)$

Ekkor $\exists c \in (a,b)$, hogy
 $f'(c) = 0$.

(azaz érintő \parallel az x tengellyel)

Biz (Bögrács - ábrázolás)

Lagrange-féle tétel



Tétel

Legyen $f \in C[a,b]$ és $f \in D_{a,b}$

Ekkor $\exists c \in (a,b)$ úgy, hogy
 $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Alkalmazás f. p. példákban (H7)

(**Függvények**, amelyek "nem oldhatók meg.)

1. feladat. Biz. be, hogy az $x^{200} + x^{199} + \dots + x^2 + x = 1$ egyenletnek $\exists!$ (pontosan 1) pozitív megoldása.

Megoldás. Az $f(x) = x^{200} + x^{199} + \dots + x^2 + x$ fgv. a $(0; \infty)$ intervallumon $\uparrow \Rightarrow$ több megoldása nem lehet. (Ebből *nem következik*, hogy egyáltalán \exists mo. (példák). A *folytonosság segít*. Nyilván $f(x) \in C_x \forall x_0 \in (0; \infty)$ esetén $f(0) = 0$, $f(1) > 1$ $\xrightarrow{\text{B-D}} \exists x_0 \in (0; 1)$ úgy, hogy $f(x_0) = 1$. (Azaz a fgv. felveszi az 1-et egy "közbülső" helyen a $(0; 1)$ -en.) (Folytonosság; *Bolzano—Darboux*-féle tulajdonság (Darboux \rightarrow Bolzano); derivált fgv. + polinom + C.)

2. feladat. Oldjuk meg $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$ egyenlőtlenséget.

Megoldás. Először oldjuk meg a

(*) $\cos(\sin x) = \sin(\cos x)$ egyenletet.

$$(*) \iff \sin\left(\frac{\pi}{2} - \sin x\right) = \sin \cos x$$

a)

$$\frac{\pi}{2} - \sin x = \cos x + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\sin x + \cos x = \frac{\pi}{2} - 2k\pi$$

b)

$$\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \sin x \right) = \cos x + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\sin x - \cos x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Mivel $|\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2}$ és $|\sin x - \cos x| \leq \sqrt{2}$, így a) és b) soha sem áll fenn, tehát (*)-nak nincs megoldása.

Tekintsük az $f(x) = \cos(\sin x) - \sin(\cos x)$ függvényt. Nyilván $f(x) > 0$ -t kell megoldani. De $f(0) = 1 - \sin 1 > 0$ és $f(x) \neq 0$ mindenütt, így $f(x) < 0$ nem lehet (ld. a folytonos függvény Bolzano–Darboux tulajdonsága) $\implies f(x) > 0 \forall x$ -re, azaz az eredeti egyenlőtlenség minden x -re teljesül.

3. feladat. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + 1}} &= \\ &= \sqrt{2x^2 - 4x + 5} + \frac{1}{\sqrt[3]{2x^2 - 4x + 5}}.\end{aligned}$$

Megoldás. Tekintsük a következő függvényt:

$$f(u) = \sqrt{u} + \frac{1}{\sqrt[3]{u}}.$$

Mivel

$$\begin{aligned}f'(u) &= \frac{1}{2}u^{-1/2} - \frac{1}{3}u^{-4/3} = \\ &= \frac{1}{2}u^{-3/6} - \frac{1}{3}u^{-8/6} = \\ &= u^{-8/6} \left[\frac{1}{2}u^{5/8} - \frac{1}{3} \right] > 0, \text{ ha } u \geq 1.\end{aligned}$$

Viszont $x^2 + 1 \geq 1$, $2x^2 - 4x + 5 = 2[x^2 - 2x] + 5 = 2(x - 1)^2 - 2 + 5 \geq 1$.

Tehát mivel $f(u) \uparrow$ az $(1; \infty)$ -en $\implies f(a) = f(b) \iff a = b$ ($a \geq 1, b \geq 1$ esetén). Azaz $x^2 + 1 = 2x^2 - 4x + 5 \iff x^2 - 4x + 4 = 0 \iff (x - 2)^2 = 0$. Tehát $x_0 = 2$ az egyetlen megoldás.

Megjegyzés. Itt **felsőbb mat.** módszer kellett. (Bár a feladat "elemi".)

4. feladat. Biz. be, hogy a $2x = \sin x + \operatorname{tg} x$ egyenletnek a $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ -en nincs megoldása.

Megoldás. (Ábrával megmutatni, hogy mit jelent ez!)

Tekintsük az $f(x) = \sin x + \operatorname{tg} x - 2x$ függvényt! Nyilván $f(0) = 0$. Belátjuk, hogy $f(x) \uparrow \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ -en.

Ebből fog következni, hogy $f(x) \neq 0$ a $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ -n \implies az egyenletnek nincs megoldása ezen az intervallumon.

Nézzük: $f'(x) = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2$ fgv.-t. Be kell látni, hogy $f'(x) > 0$, amiből köv., hogy $f \uparrow$ a $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ -n.

Mivel $\frac{\cos x + \frac{1}{\cos x}}{2} > 1$ (Sz-M közép a $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ -

n, és $\frac{1}{\cos x} < \frac{1}{\cos^2 x}$, így $\frac{\cos x + \frac{1}{\cos^2 x}}{2} > 1 \Rightarrow$

$\cos x + \frac{1}{\cos x} - 2 > 0$, amit bizonyítani akartunk.)

(Itt tehát a differenciálás segített.)

Néha $x < \frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{2}$; $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ formában szerepel a feladat.

5. feladat. Oldjuk meg:

$$x^5 - 10x^3 + 50x - 41 = 0.$$

Megoldás. $x_0 = 1$ megoldás.

Ekkor $x^5 - 10x^3 + 50x - 41 = (x - 1)(x^4 + x^3 - 9x^2 - 9x + 41) = 0$.

Kérdés: Van-e több megoldás?

Elég megoldani.

$$x^4 + x^3 - 9x^2 - 9x + 41 = 0?? \text{ nehéz!}$$

Térjünk vissza az eredetihez. Legyen $f(x) = x^5 - 10x^3 + 50x - 41$.

Tegyük fel, hogy $\exists(x_1 \neq x_0 = 1)$.

Ekkor a Rolle-tétel szerint:

$$f'(x) = \underbrace{5x^4 - 30x^2 + 50}_{(*)} = 0\text{-nak kell,}$$

hogy legyen megoldása.

De $(*)$ -nak a diszkriminánsa $< 0 \implies$ nincs valós megoldás. Ez ellentmondás, tehát nincs másik megoldás.

6. feladat. Biz. be, hogy a $2^x + 3^x = 3x + 2$ egyenletnek az $x_0 = 0$ és $x_0^* = 1$ gyökein kívül nincs több megoldása.

Megoldás. (Ábra; szigorúan konvex, ha $f' \uparrow$ egy intervallumon.)

Állítás. *Ha f szigorúan konvex egy (a, b) -n, akkor bármely egyenessel legfeljebb két közös pontja lehet a két grafikonnak. (Ábra)*

Legyen f konvex (a, b) -n és $e(x) : mx + b$ egyenes. Tfh. 3 közös pont van, azaz $f(x) - e(x) = 0$ -nak 3 megoldása van.

Ekkor a Rolle-tétel értelmében $\exists \xi_1 \in (x_1, x_2)$ és $\xi_2 \in (x_2, x_3)$ gy, hogy $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) \implies f'(\xi_1) - m = f'(\xi_2) - m \Leftrightarrow f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$, ami nem lehet, mert $f' \uparrow$ és $\xi_1 < \xi_2$.

Tehát mivel $(2^x + 3^x)' = 2^x \ln 2 + 3^x \ln 3 > 0$, így a $2^x + 3^x$ szigorúan konvex, azaz nincs több megoldása egyenletünknek.

7. feladat. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$2 \operatorname{tg} x - 2 \operatorname{tg} y = (x - y)^2 \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 = 1. \quad (2)$$

Megoldás. (1) fennáll, ha $x = y$ és $x \neq \frac{\pi}{2} +$

$k\pi$, $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Ekkor (2) $\implies \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, illetve

$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Kérdés. Van-e több megoldás?

Van-e olyan megoldás, ahol $x \neq y$?

Vehető $x > y$ (szimmetria miatt)

Tegyük fel, hogy $\exists x > y$ megoldás.

$$(1) \implies 2 \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{x - y}}_{(*)} = \underbrace{x - y}_{(**)} \quad (3)$$

$$(*) = 2 \cdot \frac{1}{\cos^2 c} \left[-\frac{\pi}{2} < -1 \leq y < c < x \leq 1 < \frac{\pi}{2} \right]$$

Lagrange-féle középérték-tételből.

$$(**) < 2.$$

$$\text{Viszont } 2 \cdot \frac{1}{\cos^2 c} \geq 2.$$

Tehát (3) bal oldala ≥ 2 és jobb oldala < 2 , így ellentmondás, azaz $\bar{\exists}$ több megoldás.

8. feladat. Oldjuk meg:

$$(*) \quad \sqrt{7 + \sqrt{7 + x}} = x$$

Mo.: Legyen $f(x) = \sqrt{7 + x}$, ekkor

$$(*) \quad f(f(x)) = x \quad \text{alakú.}$$

Tétel. *Ha $f \uparrow$, akkor az alábbi két egyenletnek ugyanazok a gyökei.*

$$(1) \quad f(f(x)) = x$$

$$(2) \quad f(x) = x$$

Bizonyítás.

I. Tegyük fel, hogy x_0 megoldása (1)-nek, azaz $f(f(x_0)) = x_0$ és mégis $f(x_0) \neq x_0$, azaz

0) $f(x_0) > x_0$ vagy

00) $f(x_0) < x_0$.

De mivel $f \uparrow$, így 0) $\implies \underbrace{f(f(x_0))}_{x_0} > f(x_0)$, ami

ellentmond 0)-nak.

Mivel $f \uparrow$, így 00) $\implies \underbrace{f(f(x_0))}_{x_0} < f(x_0)$, ami

ellentmond 00)-nak, azaz valóban $f(x_0) = x_0$, azaz x_0 megoldása (2)-nek.

II. Tegyük fel, hogy x_0 megoldása (2)-nek, azaz

$$f(x_0) = x_0 \implies f(f(x_0)) = f(x_0) = x_0,$$

azaz x_0 megoldása (1)-nek.

Így valóban a két egyenlet ekvivalens (ugyanazok a gyökei).

\implies Elég megoldani az

$$f(x) = x \iff \sqrt{7+x} = x \text{ egyenletet}$$

$$\implies x^2 - x - 7 = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}$$

Mo.: $x = \frac{1 + \sqrt{29}}{2}$ *FONTOS:* \uparrow **MON. NÖV.**

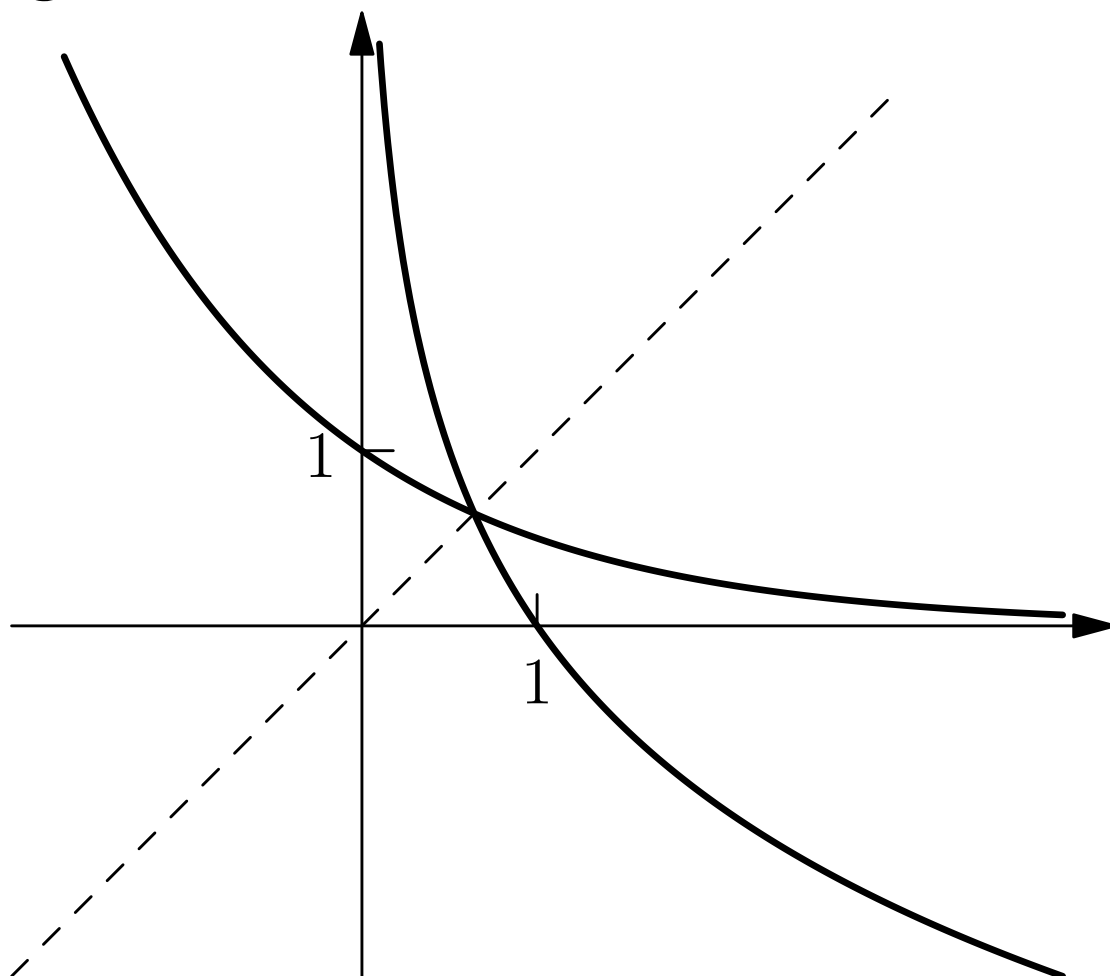
9. feladat (a dezzert!). Vigyázat! Fontos az $f \uparrow$ feltétel az előző példánál, továbbá **”a látszat néha csal!”**

Hány megoldása van a

$$\log_{1/16} x = \left(\frac{1}{16}\right)^x$$

egyenletnek?

Megoldás.



(felületes!)

” *Objection?*”

Nézzük a következőt:

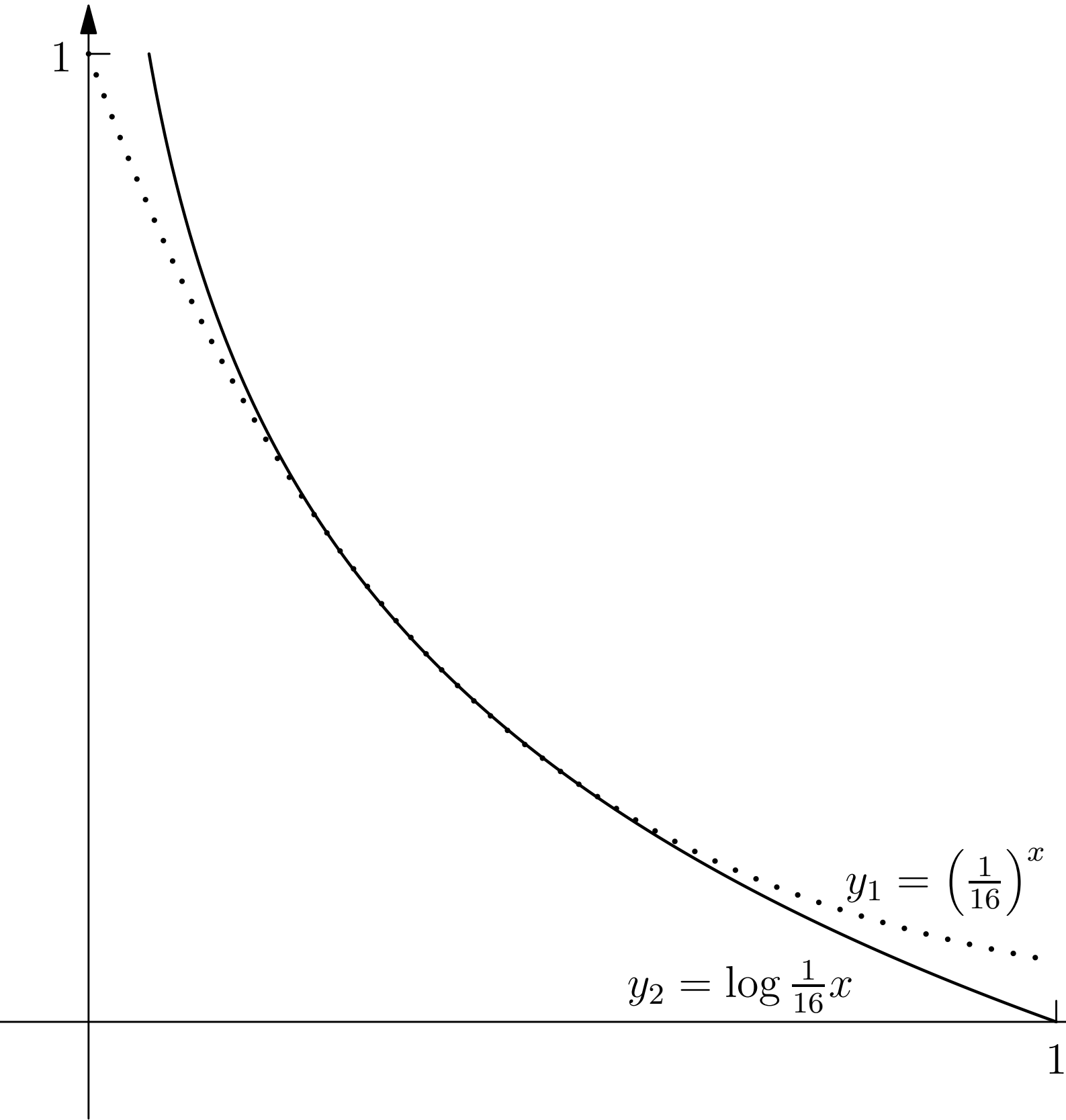
$$\left(y_1 = \left(\frac{1}{16} \right)^x ; y_2 = \log_{1/16} x \right)$$

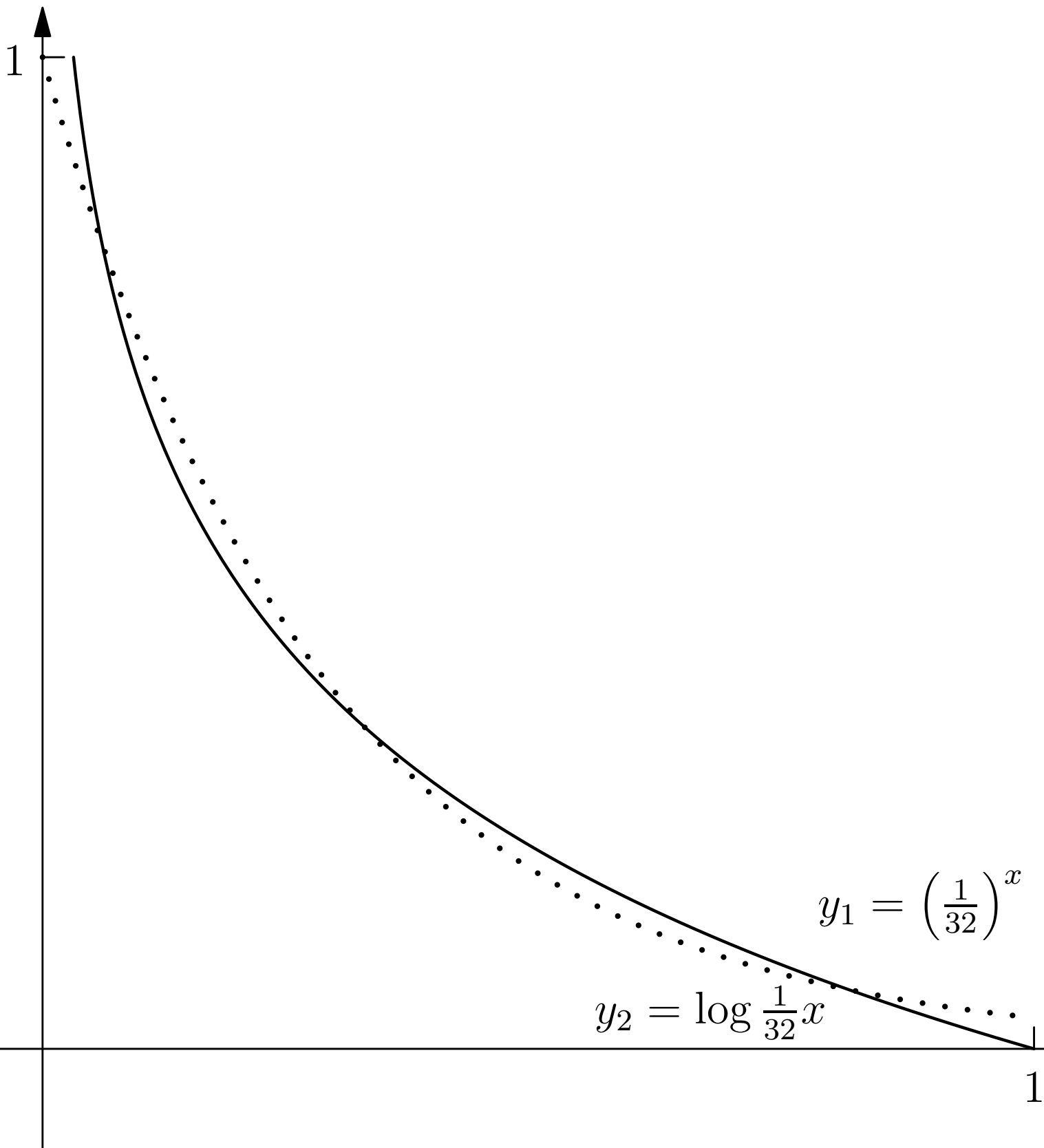
$$\left. \begin{array}{l} y_2 : x = \frac{1}{4}\text{-nél } \frac{1}{2}, \text{ azaz } \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right) \text{ rajta van } y_2\text{-n} \\ y_1 : x = \frac{1}{4}\text{-nél } \frac{1}{2}, \text{ azaz } \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right) \text{ rajta van } y_1\text{-n} \\ y_2 : x = \frac{1}{2}\text{-nél } \frac{1}{4}, \text{ azaz } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right) \text{ rajta van } y_2\text{-n} \\ y_1 : x = \frac{1}{2}\text{-nél } \frac{1}{4}, \text{ azaz } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right) \text{ rajta van } y_1\text{-n} \end{array} \right\} \implies$$

\implies legalább két megoldás van: $x = \frac{1}{4}; x = \frac{1}{2}$ és

még egy biztos az $y = x$ egyenesen (inverz miatt).

LD. MELLÉKLET: Computer által készített ábrák.





TANULSÁG!

PROBLÉMA. Milyen $0 < a < 1$ esetén van több megoldása az $a^x = \log_a x$ egyenletnek?

Állítás: akkor és csak akkor, ha $0 < a < e^{-e}$.

Bizonyítás: Legyen λ olyan szám, amelyre $a^\lambda = \lambda$ (azaz ahol az $y = x$ egyenest metszi a két görbe).

Több metszéspont akkor és csak akkor van, ha $\exists x > \lambda$, amelyre az

$$f(x) := \frac{a^{a^x}}{x} = 1 \text{ teljesül.}$$

Vegyük f differenciálhányadosát, azaz

$$f'(x) = \frac{a^{a^x}}{x^2} [a^x \ln(a^x) \cdot \ln a - 1].$$

$\alpha)$ Ha $e^{-e} < a$, akkor

$$(1) \quad -e < \ln a < 0.$$

Másrészt, mivel a $y = y \ln y$ függvénynek $\frac{1}{e}$ -ben van minimuma (ez függvényvizsgálattal

könnyen adódik), és ennek értéke $-\frac{1}{e}$, ezért

$$(2) \quad -\frac{1}{e} \leq a^x \ln a^x < 0$$

(mivel $x > 0$, ezért $a^x < 1$).

Az (1) és (2) összeszorzásából viszont az adódik, hogy

$$(3) \quad 1 > a^x \ln a^x \ln a > 0,$$

amiből $f'(x) < 0$ -t kapjuk, ami azt jelenti, hogy

$$f(x) \downarrow .$$

Viszont $f(\lambda) = 1$, így azt kapjuk, hogy $\exists x > \lambda$ úgy, hogy $f(x) = \underline{1}$ teljesüljön.

β) Ha $a = e^{-e}$, akkor $a^\lambda = \lambda \Leftrightarrow e^{-\lambda e} = \lambda \Rightarrow \lambda = \frac{1}{e}$. Így, ha $x > \lambda$, akkor $a^x \neq a^\lambda = \lambda = \frac{1}{e}$,

ami azt jelenti, hogy (2)-ben a bal oldalon $<$ jel van, azaz $f'(x) < 0$ ebben az esetben is, és mivel $f(\lambda) = 1$, ezért $\exists x > \lambda$, hogy $f(x) = 1$ legyen.

$\gamma)$ Ha $0 < a < e^{-e}$, akkor

$$(4) \quad \lambda^{\frac{1}{\lambda}} = a < e^{-e} = (e^{-1})^{\frac{1}{e^{-1}}}.$$

Mivel a $z = y^{\frac{1}{y}}$ függvény növekvő a $(0, 1)$ -en (ld. függvénydiszkusszió), ezért $(4) \Rightarrow \lambda < e^{-1}$, amiből

$$(5) \quad \lambda^{\frac{1}{\lambda}} = a < e^{-1/\lambda}$$

adódik.

Innen $a^\lambda \ln a^\lambda \ln a - 1 = \lambda^2 (\ln a)^2 - 1 > \lambda^2 \left(-\frac{1}{\lambda}\right)^2 - 1 = 0$, azaz $f'(\lambda) > 0$ és $f(\lambda) = \underline{1}$, tehát λ -nak van olyan jobb oldali környezete, ahol $f(x) > 1$. Viszont $f(1) = a^a < 1$, így a Bolzano–Darboux-féle tulajdonság miatt a $(\lambda; 1)$ intervallumon valahol kell, hogy az $f(x) = \underline{1}$ teljesüljön. Ezzel a bizonyítás kész.

Megjegyzés. A fentiekből adódik, hogy $0 < a < e^{-e}$ esetén (a szimmetriát figyelembevéve) legalább 3 metszéspont van. Több azonban nem lehet, mert ha a $g(x) = a^x - \log_a x$ függvénynek 3-nál több zéróhelye lenne, akkor a Rolle-féle középértéktétel szerint a $g'(x) = a^x \ln a - \frac{1}{x \ln a}$ függvénynek legalább

3 zérushelye lenne, ami ekvivalens azzal, hogy az $a^x \ln a = \frac{1}{x \ln a} \Leftrightarrow x(\ln a)^2 = a^{-x}$ egyenletnek legalább 3 megoldása lenne, ami viszont az a^{-x} függvény szigorú konvex volta miatt lehetetlen, hiszen egy egyenes egy ilyen görbét legfeljebb 2 pontban metszhet.

Megjegyzés. $\frac{1}{e^e} \approx \frac{1}{15,15}$ (ezért látszik nehezen az első ábráról, hogy 3 megoldás van).