Definíciók, tételek a valós függvénytanból

(Németh József előadása alapján lejegyezte Rárosi Ferenc)

Továbbiakban X adott alaphalmaz, A, B részhalmazok.

$$A \cup B = A + B \overset{\text{def}}{=} \{x\colon x \in A \text{ vagy } x \in B\}$$

$$A \cap B = A \cdot B \overset{\text{def}}{=} \{x\colon x \in A \text{ és } x \in B\}$$

$$\overline{A} = \{x\colon x \in X \text{ és } x \notin A\}$$

$$A \backslash B \overset{\text{def}}{=} A \cap \overline{B}$$

$$A \triangle B = A \backslash B \cup B \backslash A$$

De Morgan-féle azonosságok:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Konvergencia:

0) $\overline{\lim}\, a_n$, $\underline{\lim}\, a_n$ definíciói ismertek.
Például ha $a_n = n$, akkor

$$\overline{\lim} a_n = \infty, \ \underline{\lim} a_n = \infty.$$

00) $f_n(x)$, $\overline{\lim} f_n(x)$, $\underline{\lim} f_n(x)$ definíciói ismertek.

000) $\chi_H(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad x \in H, \\ 0, & \text{ha} \quad x \in \overline{H} \end{cases}$ karakterisztikus függvény

0000) $\chi_{\overline{\lim} H_n}(x) = \overline{\lim} \chi_{H_n}(x)$ végtelen sok 1.
$\chi_{\underline{\lim} H_n}(x) = \underline{\lim} \chi_{H_n}(x)$

Definíció: Legyen $\{H_n\}$ halmazsorozat

$$\overline{\lim} H_n = \{x\colon x \in H_n \text{ végtelen sok } n\text{-re}\}$$

$$\underline{\lim} H_n = \{x\colon x \in H_n \text{ véges sok } n \text{ kivételével}\}$$

Definíció: Akkor mondjuk, hogy egy $\{A_n\}$ sorozatnak van határértéke, ha $\overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n$ és $\lim H_n \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\lim} H_n = \underline{\lim} H_n$.

Tétel: *Monoton halmazsorozatnak van határértéke.*

Mégpedig ha $H_n \uparrow$, akkor $\underline{\lim_{n\to\infty} H_n = \bigcup_1^\infty H_n}$, és ha $H_n \downarrow \Rightarrow \lim_{n\to\infty} H_n = \bigcap_1^\infty H_n$.

Bizonyítás: Tfh. $H_n \uparrow$.

Első rész: Áll.: $\bigcup_1^\infty H_n = \overline{\lim} H_n = \underline{\lim} H_n \Rightarrow \bigcup_1^\infty H_n = \lim H_n$.

Tfh.: $x \in \bigcup_1^\infty H_n \Rightarrow \exists\, \nu \colon x \in H_\nu$, de akkor $\forall\, n > \nu$-re $x \in H_n$, azaz végtelen sok n-re $x \in H_n \Rightarrow x \in \overline{\lim} H_n$.

Tfh.: $x \in \overline{\lim} H_n \Rightarrow x \in H_n$ végtelen sok n-re $\Rightarrow x \in \bigcup_1^\infty H_n \Rightarrow \bigcup_1^\infty H_n = \overline{\lim} H_n$.

Második rész: Áll.: $\bigcup_1^\infty = \underline{\lim} H_n$.

Legyen $x \in \bigcup_1^\infty H_n$, ekkor $\exists\, \nu \colon x \in H_\nu$, de akkor $x \in H_n$ véges sok kivételével $\Rightarrow x \in \underline{\lim} H_n$.

Ford.: $x \in \underline{\lim} H_n \Rightarrow$ minden n-re (kivéve véges) $x \in H_n \Rightarrow x \in \bigcup_1^\infty H_n$.

Megjegyzés: $H_n \downarrow$ hasonlóan.

Néhány fogalom:

Definíció: Az X alaphalmaz bizonyos részhalmazaiból álló nem üres R halmazosztályt GYŰRŰNEK nevezzük, ha:

$$\forall\, A, B \in R \Rightarrow A \cup B \in R \text{ és } A \backslash B \in R.$$

Megjegyzés:

$$A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \in R,$$

$$A \cap B = (A \cup B) - (A \triangle B) \in R.$$

Példák:

$X = \mathbb{R},\ R = \{[a, b] \text{ int. összessége}\}$ nem gyűrű

$X = \mathbb{R},\ R = \{[a, b) \text{ int. összessége}\}$ nem gyűrű

$(*)$ $X = \mathbb{R},\ R = \{[a, b) \text{ int. összessége és ezek véges uniói}\}$ gyűrű.

Definíció: Az R gyűrűt algebrának nevezzük, ha $\forall\, A \in R$ esetén $\overline{A} \in R$.

Például: $(*)$ nem algebra (ha hozzávesszük $(-\infty, a)$ és (a, ∞) típusú intervallumokat, akkor már a $(*)$ algebra).

Megjegyzés: Egy gyűrű $\Leftrightarrow$ algebra, ha $X \in R$.

Definíció: Az R gyűrűt σ gyűrűnek (!!) nevezzük, ha

$$A_n \in R,\ n = 1, 2, \ldots \text{ esetén } \bigcup_1^\infty A_n \in R.$$

Például: ha $X = \mathbb{R}$, akkor $R = \{[a, b)$ intervallumok összessége és ezek megszámlálhatóan végtelen uniói$\}$ σ gyűrű.

Definíció: Az R σ gyűrűt σ algebrának nevezem, ha $\forall\, A \in R \Rightarrow \overline{A} \in R$.

Például: Ha $X = \mathbb{R}$ és $R = \{\frac{p}{q}$ alakú számok és ezek megszámlálhatóan végtelen unióiból álló halmaza$\}$. Ez σ gyűrű, de nem σ algebra. (Például $X = \mathbb{R} \notin R$.)

A mérték

Bev.: $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}} = \{\mathbb{R} \cup +\infty, -\infty\}$ kiterjesztett valós számhalmaz.

Jelölés: $\overline{\mathbb{R}}_0^+ \overset{\text{def}}{=} \{\mathbb{R}_0^+ \cup +\infty\}$.

Definíció: Legyen X egy alaphalmaz, $\mathcal{A}$ egy σ algebra X-en. Ekkor a $\mu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_0^+$ függvényt mértéknek nevezzük, ha teljesülnek a következők:

0) ha $A_n \in \mathcal{A}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ és $A_n \cap A_k = \emptyset$ $(n \neq k)$, akkor $\mu(\bigcup\limits_1^\infty A_n) = \sum\limits_{n=1}^\infty \mu(A_n)$, és

00) $\mu(\emptyset) = 0$.

Tkp.: a μ mérték:

1. kiterjesztett valós értékű ($\mu = \infty$ is lehet)
2. nem negatív
3. megszámlálhatóan végtelen additív [σ additív; teljes additív]
4. $\mu(\emptyset) = 0$

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ mérték tér

Néhány tulajdonság:

a) **Monotonitás**

Áll.: ha $A, B \in \mathcal{A}$ és $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$.

Bizonyítás:

$$B = A \cup (B \backslash A) \text{ továbbá } A \text{ és } B \backslash A$$

diszjunktak, így

$$\mu(B) = \mu(A) + \underbrace{\mu(B \backslash A)}_{\geq 0} \Rightarrow \mu(B) \geq \mu(A).$$

b.) **Szubtraktivitás**

Tétel: *Ha $A, B \in \mathcal{A}$ ($\mu(A) < \infty$ véges) és $A \subseteq B$, akkor $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.*

c.) **Szubadditivitás**

Tétel: *Ha $A_n \in \mathcal{A}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, akkor*

$$\mu(\bigcup_1^\infty A_n) \leq \sum_1^\infty \mu(A_n).$$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} &A_1, A_2, \ldots, A_n \\ &B_1 \stackrel{\text{def}}{=} A_1, B_2 \stackrel{\text{def}}{=} A_2 \backslash A_1, B_3 \stackrel{\text{def}}{=} A_3 \backslash A_2 \backslash A_1, \ldots \\ &B_n \stackrel{\text{def}}{=} A_n \backslash A_{n-1} \backslash \ldots \backslash A_1 = A_n \backslash (\bigcup_1^{n-1} A_i) \end{aligned}$$

Állítások

a) $\{B_i\}$ diszjunkt halmazok sorozata

b) $\bigcup_1^\infty A_i = \bigcup_1^\infty B_i \Rightarrow \mu(\bigcup_1^\infty A_n) = \mu(\bigcup_1^\infty B_n) \stackrel{\text{diszj.}}{=} \sum_{n=1}^\infty \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n)$.
Azaz valóban szubadditív.

Folytonosság

$$x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0) \Leftrightarrow \lim f(x_n) = f(\lim x_n)$$

Analógia:

$$\lim \mu(A_n) = \mu[\lim(A_n)]$$

Tétel (a mérték folytonossága): *Legyen $A_n \in \mathcal{A}$ minden $n \in \mathbb{N}$-re és $\{A_n\}$ legyen monoton növő (bővülő), akkor $\mu(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.*

Bizonyítás. Legyen $A_n \uparrow$.

Tudjuk: $\lim A_n = \bigcup_1^\infty A_n$. Így a bizonyítandó: $\mu(\bigcup_1^\infty A_n) = \lim \mu(A_n)$.

Tekintsük az $A_0 = \emptyset; A_1, A_2\setminus A_1, A_3\setminus A_2, \ldots, A_n\setminus A_{n-1}$ halmazsorozatot. Ezekre fennáll, hogy

1. diszjunktak;
2. $\bigcup_1^\infty A_n = \bigcup_1^\infty (A_n\setminus A_{n-1})$

$$\mu(\bigcup_1^\infty A_n) = \mu[\bigcup_1^\infty (A_n\setminus A_{n-1})] = \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n\setminus A_{n-1}) \overset{\text{(szubtraktivitás)}}{\overset{(*)}{=}}$$

$$= \sum_{n=1}^\infty [\mu(A_n) - \mu(A_{n-1})] = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^k [\mu(A_n) - \mu(A_{n-1})] =$$

$$= \lim_{k\to\infty} (\mu(A_1) - \mu(A_0) + \mu(A_2) - \mu(A_1) + \ldots + \mu(A_k) - \mu(A_{k-1})] = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).$$

$^{(*)}$ Ha $\exists\, n\colon \mu(A_{n-1}) = \infty \Rightarrow A_n \supseteq A_{n-1} \Rightarrow \mu(A_n) \ge \mu(A_{n-1}) = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \infty$

$\bigcup_1^\infty A_n \supseteq A_{n-1}$

$\infty = \mu(\bigcup_1^\infty A_n) \supseteq \mu(A_{n-1}) = \infty$

Ezzel kész.

Csökkenő sorozatra kissé bonyolultabb:

Tétel: *Legyen $A_n \in \mathcal{A}$ minden n-re $A_n \downarrow$ és $\exists\, \nu\colon \mu(A_\nu) < \infty$. Ekkor $\mu(\lim A_n) = \lim \mu(A_n)$.*

(Nem bizonyítjuk ezt az esetet.)

Fontos definíció: Legyen X egy alaphalmaz. Az R σ gyűrűt öröklődő σ gyűrűnek nevezem, ha $\forall\, A \in R$ esetén teljesül, hogy $\forall\, B \subseteq A$ halmaza $B \in R$.

Külső mérték

Definíció: Legyen R egy öröklődő σ gyűrű. Ekkor a μ^* külső mérték az R-en, ha teljesülnek a következők:

1. $\mu^*\colon R \to \overline{\mathbb{R}}_0^+$

2. Ha $\{A_n\}$ olyan halmazsorozat, hogy $\forall\, n$-re $A_n \in R$, akkor

$$\mu^*(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) \text{ (megszáml. végtelen szubadditivitás).}$$

3. Ha $A \subseteq B$ és $AB \in R$, akkor $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ (monotonitás).
4. $\mu^*(\emptyset) = 0$

Lebesgue-féle külső mérték
(1875–1941)

Tek.: $\mathbb{R}$ összes részhalmazából álló σ algebrát.

Definíció: Az $\mathbb{R}$-ben lévő $\langle A, B\rangle$ intervallum elemi mértékét a $B - A$ számmal definiáljuk.

Definíció: Legyen $H \subseteq \mathbb{R}$. Ekkor a H halmaz Lebesgue-féle külső mértékén a következőt értjük: $\mu^*(H) = \inf\{\sum\limits_{n=1}^{\infty} |I_n|$, ahol I_n intervallum és $|I_n| = b_n - a_n$ és $H \subseteq \bigcup\limits_{1}^{\infty} I_n\}$.

Megjegyzés: Jordan és Lebesgue m. alapvető különbsége, hogy itt megengedünk végtelen lefedést is.

Megjegyzés: Például: $[0, 1]$ rac. pontjainak halmaza: H
Jordan-féle külső mérték: $\mu^*(H) = 1$
Lebesgue-féle külső mérték: $\mu^*(H) = 0$
Ugyanis a rac. pontokat sorozatba szedem:
$\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$
r_1-et lefedem I_1 $\frac{\varepsilon}{2}$ hosszú szakasszal
r_2-t lefedem I_2 $\frac{\varepsilon}{2^2}$ hosszú szakasszal
$\vdots$
r_n-et lefedem I_n $\frac{\varepsilon}{2^n}$ hosszú szakasszal
Így $H \subseteq \bigcup\limits_{1}^{\infty} I_n$ és $\sum\limits_{1}^{\infty} |I_n| = \varepsilon$, azaz $\mu^*(H) = 0$.

Megjegyzés: Az, hogy a Jordan-féle külső mérték 1, az attól triviális, hogy 1-nél rövidebb összhosszúságú véges intervallumrendszerrel nem fedhető le.

Tétel: *A fent definiált μ^* valóban külső mérték (azaz rendelkezik az előzőkben említett 1)–4) tulajdonságokkal).*

Bizonyítás:
Ad 1. $\mu^*(H) \geq 0$ (és végtelen is lehet)
Ad 3. Ha $A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ (több elemű halmaz infimuma kisebb vagy egyenlő).
Ad 4. $\mu^*(\emptyset) = 0$. A lefedő int. rendszerben akármilyen rövid van!

Ad 2. Tek. $[E_\nu]_1^\infty, E_\nu \subseteq \mathbb{R}\ \forall\, \nu$-re.
Kérdés:

$$\mu^*(\sum_{\nu=1}^{\infty} E_\nu) \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu^*(E_\nu)$$

Legyen $(a_n^{(\nu)}, b_n^{(\nu)})$ int. rendszer olyan, hogy $E_\nu \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \langle a_n^{(\nu)}, (b_n^{(\nu)} \rangle$ és $\mu^*(E_\nu) + \frac{\varepsilon}{2^\nu} > \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^{(\nu)} - a_n^{(\nu)})$, ahol ε egy előre adott tetszőleges pozitív szám.

Világos, hogy $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} E_\nu \subseteq \sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \langle a_n^{(\nu)}, b_n^{(\nu)} \rangle \Rightarrow \underline{\mu^*(\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} E_\nu)} \leq \sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty} (b_n^{(\nu)} - a_n^{(\nu)}) \leq \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} [\mu^*(E_\nu) + \frac{\varepsilon}{2^\nu}] = \underline{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \mu^*(E_\nu) + \varepsilon}$.

Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőleges volt $\Rightarrow \mu^*(\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} E_\nu) \leq \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \mu^*(E_\nu)$.

Lebesgue-mérték

Definíció: A $H \subseteq \mathbb{R}$ halmazt Lebesgue-mérhetőnek nevezzük, ha minden $I \subseteq \mathbb{R}$ esetén fennáll, hogy $\mu^*(H \cap I) + \mu^*(\overline{H} \cap I) = |I| = (\mu^*(I))$ és a H halmaz Lebesgue-mértéken a $\mu(H) \overset{\text{def}}{=} \mu^*(H)$-t értem.

Megjegyzés: $\geq$ mindig áll.

Tétel: *Ha H Lebesgue-mérhető, akkor $\forall\, K \subseteq \mathbb{R}$ esetén: $\mu^*(H \cap K) + \mu^*(\overline{H} \cap K) = \mu^*(K)$.*

(Nem bizonyítjuk.)

Megjegyzés: elegendő intervallumokra megkövetelni.

Megjegyzés: Ezt az alakot fogjuk használni.

Tétel: *A Lebesgue-mérhető halmazok σ-algebrát alkotnak.*

Bizonyítás: Be kell látni:

a) Ha A és B Lebesgue-mérhetők, akkor $A \cup B$ is Lebesgue- mérhető.
b) $A \backslash B$ is Lebesgue-mérhető
c) Ha A_n Lebesgue-mérhető $\forall\, n$-re, akkor $\bigcup\limits_1^{\infty} A_n$ is Lebesgue-mérhető.
d) Ha A Lebesgue-mérhető, akkor $\overline{A}$ is Lebesgue- mérhető.

Csak c) bizonyítását részletezzük.

Legyen $\{E_n\}$ halmaz-sorozat úgy, hogy $\forall\, n$-re E_n mérhető.

Be kell látni, hogy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} E_n = S$ mérhető.

Legyen W tetsz. Be kell látni:

$$\mu^*(W) = \mu^*(W \cdot S) + \mu^*(W \cdot \overline{S}).$$

Mivel E_1 mérhető $\Rightarrow$

$$\mu^*(W) = \mu^*(W \cdot E_1) + \underbrace{\mu^*(W \cdot \overline{E}_1)}$$

$$\downarrow$$

$$W \cdot \overline{E}_1.$$

Mivel E_2 mérhető $\Rightarrow$

$$\mu^*(W\overline{E}_1) = \mu^*(W\overline{E}_1 E_2) + \mu^*(W\overline{E}_1\overline{E}_2).$$

Beírom:

$$\mu^*(W) = \mu^*(WE_1) + \mu^*(W\overline{E}_1 E_2) + \mu^*(W\overline{E}_1\overline{E}_2).$$

1. lépés: Tfh. $\{E_n\}$ diszjunkt elemekből áll. Ekkor $\overline{E}_1 E_2 = E_2 \Rightarrow$

$$\mu^*(W) = \mu^*(W \cdot E_1) + \mu^*(W \cdot E_2) + \mu^*(W \cdot \overline{E}_1\overline{E}_2)$$

$$\overset{\text{telj.ind.}}{\Longrightarrow} \mu^*(W) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(W \cdot E_i) + \underbrace{\mu^*(W \cdot \overline{E}_1\overline{E}_2 \cdots \overline{E}_n)}_{(*)}$$

$$\overline{E}_1 \ldots \overline{E}_n = \overline{E_1 + \ldots + E_n} \supseteq \overline{S} \Rightarrow W \cdot \overline{E}_1 \cdots \overline{E}_n \supseteq W \cdot \overline{S}$$

$(*)$ miatt

$$\mu^*(W) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E_i \cdot W) + \mu^*(W\overline{S})$$

$$\Rightarrow \mu^*(W) \geq \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i \cdot W) + \mu^*(W\overline{S})}_{\geq \mu^*(\sum_{i=1}^{\infty} E_i \cdot W)\ (\text{külső m. szubadditivitása})}.$$

Így

$$\left.\begin{array}{l} \mu^*(W) \geq \mu^*(S \cdot W) + \mu^*(\overline{S} \cdot W) \\ \mu^*(W) \leq \mu^*(S \cdot W) + \mu^*(\overline{S} \cdot W) \text{ mindig} \end{array}\right\} \Rightarrow'' ='' $$

2. lépés. Ha $\{E_n\}$ nem diszjunktak

$$E'_1 = E_1,\ E'_2 = E_2 \backslash E_1, \ldots, E'_n = E_n \backslash E_{n-1} \backslash \ldots \backslash E_1.$$

Ekkor belátható, hogy

a) $\{E_i\}$ diszjunkt halmazok

b) $\sum\limits_1^\infty E_i = \sum\limits_1^\infty E_1'$.

Mivel E_n mérhető $\Rightarrow E_n'$ is mérhető $\Rightarrow \sum\limits_{i=1}^\infty E_i'$ mérhető (ld. 1. lépés), de $\sum E_i = \sum E_i' \Rightarrow$ $\sum\limits_{i=1}^\infty E_i$ is mérhető.

Tétel: *A Lebesgue-mérték σ additív (megszámlálhatóan végtelen additív).*

Bizonyítás: Legyen $\{E_i\}$ diszjunkt mérhető halmazokból álló halmazsorozat. Be kell látni: $\mu(\sum\limits_{i=1}^\infty E_i) = \sum\limits_{i=1}^\infty \mu(E_i)$.

1. lépés. Tekintsük E_1, E_2-t és $E_1 + E_2 \overset{\text{jel}}{=} W$. Ekkor

$$\mu^*(E_1 + E_2) = \mu^*(\underbrace{E_1(E_1 + E_2)}_{E_1}) + \mu^*(\underbrace{\overline{E}_1(E_1 + E_2)}_{E_2}).$$

Így

$$\mu^*(E_1 + E_2) = \mu^*(E_1) + \mu^*(E_2).$$

Viszont $*$ nem kell, hiszen mérhető halmazokról van szó. Azaz

$$\mu(E_1 + E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2).$$

2. lépés

Telj. ind. $\mu(\sum\limits_{i=1}^n E_i) = \sum\limits_{i=1}^n \mu(E_i)$.

3. lépés

$$S \overset{\text{jel}}{=} \sum_{i=1}^\infty E_i$$

Világos:

$$S \supseteq \sum_{i=1}^n E_i \Rightarrow \mu(S) \geq \mu(\sum_{i=1}^n E_i) = \sum_{i=1}^n \mu(E_i) \Rightarrow \mu(S) \geq \sum_{i=1}^\infty \mu(E_i).$$

Ugyanakkor:

$$S = \sum_{i=1}^\infty E_i \Rightarrow \mu(S) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu(E_i) \Rightarrow \mu(S) = \sum_{i=1}^\infty \mu(E_i) \Leftrightarrow \mu(\sum_{i=1}^\infty E_i) = \sum_{i=1}^\infty \mu(E_i),$$

amit bizonyítani akartunk.
Végül e fejezet lezárásaként felvetjük azt a kérdést, hogy van-e egyáltalán nem mérhető halmaz. Igen, pl. az ú.n. Zermeló-féle halmaz nem mérhető. (Erről bővebben Sz.-Nagy Béla: Valós függvények és függvénysorok című könyvében olvashatunk.)

A nullamértékű halmazok

Három definíciót adunk meg, amelyek ekvivalensek.

0. Definíció: Ha H mérhető és $\mu(H) = 0$, akkor H-t nulla-halmaznak nevezzük.

1. Definíció: A $H \subseteq \mathbb{R}$ halmazt nulla-halmaznak nevezzük, ha $\exists\, I_n$ int. rendszer úgy, hogy $H \subseteq \bigcup\limits_1^\infty I_n$ és $\sum |I_n| < \varepsilon$, ahol ε egy előre adott pozitív szám.
[$\forall\, \varepsilon (> 0)$-hoz $\exists\, I_n$, hogy $H \subseteq \bigcup\limits_1 I_n$ és $\sum |I_n| < \varepsilon$]

2. Definíció: A $H \subseteq \mathbb{R}$ halmazt nulla-halmaznak nevezzük, ha $\exists I_n$ intervallumrendszer, hogy $H \subseteq \bigcup\limits_1^\infty I_n$ és $\sum |I_n| < \infty$ (véges) és $\forall\, x \in H$ esetén $x \in I_n$ végtelen sok n-re.

Megjegyzés: Az 1. és 2. definíciók ekvivalenciájának bizonyítása Sz.-Nagy Béla: Valós függvények és függvénysorok c. könyvében található.

Továbbiakban az 1. def. fog előkerülni legtöbbször.

Néhány tény:

I. Egy pont 0 halmazt alkot.
II. Véges sok pontból álló halmaz is 0 halmaz.
III. Ha H megszáml. végtelen halmaz, akkor H 0-halmaz.

A III. bizonyítása: H elemei sorbaszedhetők $h_1, \ldots, h_n, \ldots$. Legyen $\varepsilon > 0$.

$I_1 : |I_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ fedje le h_1-et.
$I_2 : |I_2| < \frac{\varepsilon}{2^2}$ fedje le h_2-t.
$\vdots$
$I_n : |I_n| < \frac{\varepsilon}{2^n}$ fedje le h_n-et.
$\vdots$

$$H \subseteq \bigcup_1^\infty I_n \text{ és } \sum |I_n| < \varepsilon \cdot \underbrace{\sum_1^\infty \frac{1}{2^n}}_{=1}.$$

Kérdés: Ha H 0-halmaz $\overset{?}{\Rightarrow}$ H megszámlálható.
NEM ellenpélda: Cantor-féle triadikus halmaz 0-halmaz és kontinuum számosságú (ld. Sz.-Nagy Béla: Valós függvények és függvénysorok c. könyve).

Mérhető függvények

Fontos:

1. mérhető halmaz: L-mérhető halmaz
   mérhető függvény: L-mérhető függvény
2. $f\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ (kiterjesztett valós értékű függvény)

Definíció: Az $f\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ függvényt mérhetőnek nevezzük, ha $\forall\, c \in \overline{\mathbb{R}}$ esetén az

$$N_f^{<}(c) := \{x\colon f(x) < c\} \text{ nívóhalmaz mérhető.}$$

($N_f^{<}(x)$: f függvény c-hez tartozó kisebb típusú nívóhalmaza).

Tétel: *A fenti definícióban $N_f^{<}(x)$ helyett $N_f^{\leq}(c); N_f^{>}(c), N_f^{\geq}(x)$ bármelyike vehető.*

Tétel: *Ha f, g mérhető függvények, akkor $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ esetén*

1) $\lambda\, f$
2) $f + g$
3) $f \cdot g$
4) $\frac{f}{g}$ *(ha $g \neq 0$)*
5) $f \cup g$
6) $f \cap g$ *is mérhetők.*

Bizonyítás:

Ad 1. $\lambda\, f$ Legyen c tetszőleges.

$$N_{\lambda f}^{<}(c) : \{x : \lambda\, f(x) < c\} \begin{cases} x : f(x) < \frac{c}{\lambda} = N_f^{<}(\frac{c}{\lambda}) & (\lambda > 0) \\ x : f(x) > \frac{c}{\lambda} = N_f^{>}(\frac{c}{\lambda}) & (\lambda < 0) \\ \mathbb{R} \quad c > 0 & (\lambda = 0) \\ \emptyset \quad c \leq 0 & \end{cases}$$

Ad 2. $f + g$

0) Ha f mérhető, akkor $f(x) + a$ is, ahol $a \in \mathbb{R}$ tetsz.
   Mivel $N_{f+a}^{<}(c) = N_f^{<}(c - a)$, így az állítás nyilvánvaló.

00) Ha f és g mérhető, akkor $\{x\colon f(x) > g(x)\}$ mérhető. Ugyanis:

$$\{x : f(x) > g(x)\} = \bigcup_n \left(\underbrace{\overbrace{\{x : f(x) > r_n\}}^{\text{mérhető}}}_{N_f^{>}(r_n)} \cap \underbrace{\overbrace{\{x : r_n > g(x)\}}^{\text{mérhető}}}_{N_g^{<}(r_n)} \right)$$

(r_n: összes rac. számok sorozata)

[r_n-et beszúrtam $f(x)$ és $g(x)$ közé]

000) 0)–00)$\Rightarrow \underbrace{\{x : f(x) > a - g(x)\}}_{\text{mérhető}} = \underbrace{\{x : f(x) + g(x) > a\}}_{N^{>}_{f+g}} \Rightarrow f + g$ mérhető.

Ad 3. Mivel $f \cdot g = \frac{(f+g)^2-(f-g)^2}{4}$, ezért elég f^2 mérhetőségét belátni:

$$N^{<}_{f^2}(c) = \begin{cases} \emptyset, & \text{ha} \quad c \leq 0 \\ x\colon -\sqrt{c} < f(x) < \sqrt{c} = N^{>}_{f}(-\sqrt{c}) \cap N^{<}_{f}(\sqrt{c}), & \text{ha} \quad c > 0. \end{cases}$$

Tétel: *Legyen X egy mérhető halmaz és f_n legyen mérhető X-en minden n-re és $f_n(x) \to f(x)$, $\forall\, x \in X$ esetén. Ekkor az f függvény mérhető ezen az X-en.*

Bizonyítás: Mivel

$$\{x : f(x) < c\} = \bigcup_k \bigcup_\nu \bigcap_{n>\nu} \{f : f_n(x) < c - \frac{1}{k}\} \quad (k \in \mathbb{N}),$$

ezért az állítás nyilvánvaló.

Megjegyzés: Azon, hogy egy állítás majdnem mindenütt teljesül egy X halmazon azt értjük, hogy az X-nek azon pontjai, ahol nem teljesül, nulla-halmazt alkotnak.

Tétel: *Legyen X egy mérhető halmaz és $f_n(x)$ legyen mérhető X-en minden n-re, és $f_n(x) \to f(x)$ majdnem minden $x \in X$ esetén. Ekkor f függvény mérhető X-en.*

Megjegyzés:

pozitív rész: negatív rész:

$$a^+ = \begin{cases} a, & \text{ha} \quad a \geq 0 \\ 0, & \text{ha} \quad a < 0 \end{cases} \qquad a^- = \begin{cases} -a, & \text{ha} \quad a < 0 \\ 0, & \text{ha} \quad a \geq 0. \end{cases}$$

Mivel

$$\left.\begin{aligned} f^+ &= f \cup 0 \\ f^- &= -(f \cap 0) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{hogyha } f \text{ mérhető, akkor } f^+, f^- \text{ is mérhető.}$$

Megjegyzés: $f = f^+ - f^-$

Lépcsős függvények

Definíció: Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt lépcsős függvénynek nevezem, ha létezik diszjunkt, mérhető halmazoknak egy véges $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ osztálya és $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ valós szám n-es, úgy, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} \alpha_i, & \text{ha} \quad x \in E_i \\ 0, & \text{ha} \quad x \in \overline{E_1 \cup \ldots \cup E_n} \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Megjegyzés: Végtelen hosszú lépcső van, végtelen "magas" nincs.

Például: A Dirichlet függvény is lépcsős függvény.

Tétel: *A lépcsős függvények mérhetők.*

Bizonyítás: **Definíció:** Egy A halmaz karakterisztikus függvénye
$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad x \in A \\ 0, & \text{ha} \quad x \in \overline{A} \end{cases}.$

Állítás: Ha A mérhető, akkor χ_A mérhető. Ugyanis:

$$N^{<}_{\chi_A}(c) = \begin{cases} \mathbb{R}, \ c > 1 \\ \overline{A}, \ 0 < c \le 1 \\ \emptyset, \ c \le 0, \end{cases} \quad \text{tehát } \chi_A \text{ mérhető}$$

Viszont mivel

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}(x),$$

ezért minden $f(x)$ lépcsős függvény valóban mérhető.

Lépcsős függvényekre egy fontos tétel van.

Tétel: *Minden $f\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ mérhető függvényhez van olyan $\{\varphi_n\}$ lépcsős függvényekből álló sorozat, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$ teljesül.*

Továbbá teljesül, hogy ha $f \ge 0$, akkor $\exists\, \varphi_n \uparrow;\ \varphi_n \ge 0$ sorozat, amelyre $\varphi_n(x) \to f(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Bizonyítás:

1. Tfh.: $f \ge 0$
Megkonstruáljuk a lépcsős függvénysorozatot a következőképpen: Legyen

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{i-1}{2^n}, & \text{ha} \quad \frac{i-1}{2^n} \le f(x) < \frac{i}{2^n}, \text{ ahol } i = 1, 2, \ldots, n \cdot 2^n \\ n, & \text{ha} \quad n \le f(x) \end{cases}$$

$\varphi_n(x) \uparrow$ nyilvánvaló.

Továbbá:

0) ha $f(x)$ véges, akkor $|f(x) - \varphi_n(x)| \le \frac{1}{2^n}$
00) ha $f(x) = \infty$, akkor $\varphi_n = n$

Tehát bebizonyítottuk, ha $f \ge 0$, mérhető, akkor $\exists\, \varphi_n \uparrow, \varphi_n \ge 0$ lépcsős függvénysorozat úgy, hogy $\varphi_n(x) \to f(x)$.

2. Legyen f tetszőleges mérhető függvény. Mivel $f = f^+ - f^-$ és tudjuk, hogy f^+ és f^- is mérhetők, ezért előzőek alapján $\exists\, \varphi_n \uparrow, \varphi_n \geq 0, \varphi_n \to f^+$ $\{\varphi_n\}$ lépcsős függvénysorozat, és $\exists\, \psi_n \uparrow \psi_n \geq 0, \psi_n \to f^-$ $\{\psi_n\}$ lépcsős függvénysorozat. Így

$$\varphi_n - \psi_n \to f^+ - f^- = f.$$

A Lebesgue-integrál felépítése

1. lépés: Lépcsős függvények integrálja.
Definíció: Legyen $\varphi(x)$ egy lépcsős függvény az $\{E_1, \ldots, E_n\}$ és $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ paraméterekkel.

Azaz:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \alpha_i, & \text{ha} \quad x \in E_i \\ 0, & \text{ha} \quad x \in \overline{E_1 \cup \ldots \cup E_n} \end{cases}.$$

Ekkor $\varphi(x)$ integrálján az alábbit értjük:

$$\int \varphi(x)dx :\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i).$$

Megjegyzés: ∞ is lehet.

Néhány tulajdonság. (A bizonyítások triviálisak.)

α) Ha φ lépcsős függvény és $c \in \mathbb{R}$, akkor $\int c\varphi = c \int f$.
β) Ha φ, ψ lépcsős függvények, akkor $\int (\varphi + \psi) = \int \varphi + \int \psi$.
γ) Ha $\varphi \leq \psi \Rightarrow \int \varphi \leq \int \psi$ (φ, ψ lépcsős függvények).
δ) Ha φ lépcsős függvény, akkor $|\int \varphi| \leq \int |\varphi|$.

2. lépés: Nemnegatív mérhető függvények integrálja.

Definíció: Ha $f \geq 0$ és mérhető, akkor az ő integrálján a következőt értem:

$$\int f := \sup \left\{ \int \varphi, \text{ ahol } \varphi \text{ lépcsős és } \varphi(x) \leq f(x) \text{ m.m. } x\text{-re} \right\}.$$

Megjegyzés: Ez is lehet végtelen is (például $f(x) = \frac{1}{x}$; a $(0, 1)$-en).

Tulajdonságok:

a) $\int f \geq 0$ (Mivel $\varphi \equiv 0$ lépcsős is benne van, így triviális.)
b) Ha $f \geq 0$ mérhető és $c \geq 0$, akkor $\int cf = c \int f$ (ld. később)
c) Ha $f \geq 0, g \geq 0$ mérhető, akkor $\int (f + g) = \int (f) + \int (g)$ (ld. később)
d) Ha $f \geq 0, g \geq 0$ mérhető és $f \leq g$, akkor $\int f \leq \int g$.

A d) bizonyítása: $\{\int \varphi$, ahol $\varphi \leq f\} \subseteq \{\int \psi$, ahol $\psi \leq g\} \Rightarrow$ szupremumokra $\leq$ áll.

Két fontos lemma

I. Lemma. Legyen f_n az $\mathbb{R}$-en értelmezett nemnegatív mérhető függvények monoton növő sorozata.

Ha $\int f_n$ sorozat korlátos, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ majdnem mindenütt véges.

Bizonyítás: Mivel $f_n(x) \uparrow \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\ \exists$ minden x-re (esetleg ∞).

Jelölje $H = \{x : \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \infty\}$.

Be kell látni, hogy $\mu(H) = 0$. Legyen α az $\{\int f_n\}$ egy felső korlátja ($\alpha \geq 0$), és legyen

$$H_m := \{x : \lim_{n\to\infty} f_n(x) \geq \alpha m\}.$$

$(*)$ Világos: H_m monoton szűkülő sorozat és

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} H_m = H, \text{ azaz } \lim_{n\to\infty} H_m = H.$$

Legyen

$$H_m^{(k)} : \stackrel{\text{def}}{=} \{x : f_k(x) \geq \alpha m\}$$

$(**)$ Világos: $H_m^{(k)}$ k-ban monoton növő (m. rögz.) (mivel $\{f_k\} \uparrow$) és $H_m = \bigcup\limits_{k}^{\infty} H_m^{(k)}$ és $H_m = \bigcup\limits_{k}^{\infty} H_m^{(k)} = \lim\limits_{k\to\infty} H_m^{(k)}$. Mivel $\alpha \geq \int f_k\ \forall\, k$-ra, ezért

$$\alpha \geq \int f_k \stackrel{!}{\geq} \alpha m \mu(H_m^{(k)}) \Rightarrow \mu(H_m^{(k)}) \leq \frac{1}{m} \text{ minden } k\text{-ra.}$$

$$\mu(H_m) = \mu(\lim_{k\to\infty} H_m^{(k)}) = \lim_{k\to\infty} \mu(H_m^{(k)}) \leq \frac{1}{m}$$

$$0 \stackrel{!}{\leq} \mu(H) = \mu(\lim H_m) = \lim_m \mu(H_m) \leq \lim \frac{1}{m} = 0 \Rightarrow \mu(H) = 0.$$

II. Lemma. Legyen f_n az $\mathbb{R}$-en értelmezett nemnegatív, mérhető monoton növő függvények sorozata. Ekkor $\lim \int f_n = \int \lim f_n$.

Ezt a lemmát itt nem bizonyítjuk.

Adósság (az integrál korábban b), ill. c) alatti tulajdonságai)

1. Tétel: *Ha $f \geq 0$, mérhető és $c \geq 0 \Rightarrow \int cf = c \int f$.*

2. Tétel: *Ha* $f \geq 0, g \geq$ *mérhető, akkor* $\int (f+g) = \int f + \int g$.

Bizonyítás:

Ad 1. $f \geq 0$ és mérhető $\Rightarrow \exists\, \varphi_n \uparrow$ lépcsős $\varphi_n(x) \to f(x)$

$\Rightarrow c\varphi_n \uparrow, c\varphi_n \to cf$

$\lim \int c\varphi_n \overset{\text{II.lemma}}{=} \int \lim c\varphi_n = \int cf$

$\lim \int c\varphi_n = \lim c \int \varphi_n = c \lim \int \varphi_n = c \int f \Rightarrow \int cf = c \int f$.

Ad 2. φ_n és ψ_n legyenek olyan lépcsős függvények, amelyekre $\varphi_n \uparrow f, \psi_n \uparrow g$, s így $\varphi_n + \psi_n \uparrow f + g$.
Tekintsük:

$\lim \int \varphi_n + \psi_n = \int \lim(\varphi_n + \psi_n) = \int (f+g)$

$\lim \int (\varphi_n + \psi_n) = \lim \int \varphi_n + \int \psi_n = \ldots \int f + \int g \Rightarrow \int (f+g) = \int f + \int g$.

Egy érdekes állítás:

Tétel: *Ha* $f \geq 0$, *mérhető és* $\int f = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ *majdnem minden* x*-re.*

Bizonyítás: $\varphi_n \uparrow, \varphi_n \to f, 0 \leq \int \varphi_n \leq \int f$ és $\int \varphi_n \to \int f = 0$

$\Rightarrow \forall\, n$-re $\int \varphi_n = 0$ majdnem minden x-re

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \varphi_n(x) \to 0 \\ \varphi_n(x) \to f \end{array}\right\}$ majdnem minden x-re $\Rightarrow f = 0$.

3. lépés (az integrál felépítésének 3. lépése)

Ha f mérhető, akkor az $f = f^+ - f^-$ előállításban $\left.\begin{array}{l} f^+ \geq 0 \\ f^- \geq 0 \end{array}\right\}$ mérhetők.

Definíció: Legyen f mérhető függvény. Az f függvényt Lebesgue szerint integrálhatónak nevezzük, ha $\int f^+$ és $\int f^-$ végesek és

$$\int f :\overset{\text{def}}{=} \int f^+ - \int f^-.$$

Megjegyzés: $\int f^+$ és $\int f^-$ (ld. a 2. lépést!).

Tulajdonságok

1. tulajdonság: ”Rendőr elv”

Tétel: *Ha* f *mérhető és* h, g *integrálhatók és majdnem minden* x*-re* $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ *teljesül, akkor* f *is integrálható.*

Bizonyítás:

$0 \leq f^+ \leq g^+ \Rightarrow 0 \leq \int f^+ \leq \int g^+$
$0 \leq f^- \leq h^- \Rightarrow 0 \leq \int f^- \leq \int h^-$
$\int g^+, \int h^-$ végesek, mert integrálható volt
$\Downarrow$
$\int f^+$ és $\int f^-$ is végesek!

2. tulajdonság: Additivitás

Tétel: *Ha f, g integrálható, akkor $f+g$ is integrálható és $\int (f+g) = \int f + \int g$.*

Bizonyítás:

0. lépés

$$(f+g)^+ \leq f^+ + g^+$$

$$(f+g)^- \leq f^- + g^-$$

$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow 0 \leq \int (f+g)^+ \leq \int f^+ + \int g^+ \\ 0 \leq \int (f+g)^- \leq \int f^- + \int g^- \end{array}\right\} \Rightarrow \int (f+g)^+$ és $\int (f+g)^-$ is végesek, hiszen a jobb oldalak végesek, mert f és g integrálható. Tehát $f+g$ integrálható.

1. lépés

$$\left.\begin{array}{l} f+g = (f+g)^+ - (f+g)^- \\ f+g = \underbrace{f^+ - f^-} + \underbrace{g^+ - g^-} \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{\geq 0}{(f+g)^+} + \underset{\geq 0}{f^-} + \underset{\geq 0}{g^-} = \underset{\geq 0}{f^+} + \underset{\geq 0}{g^+} + \underset{\geq 0}{(f+g)^-} \Rightarrow$$

$$(*) \qquad \int (f+g)^+ + \int f^- + \int g^- = \int f^+ + \int g^+ + \int (f+g)^-.$$

2. lépés

A $(*)$-ból adódik, hogy

$$\int (f+g)^+ - \int (f+g)^- = \int f^+ - \int f^- + \int g^+ - \int g^- \Rightarrow \int (f+g) = \int f + \int g$$

3. tulajdonság: Homogenitás

Tétel: *Ha f integrálható és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor λf integrálható és*

$$\int \lambda f = \lambda \int f.$$

Bizonyítás:

0) $\underline{\lambda \geq 0}$

$$\int \lambda f = \int (\lambda f)^+ - \int (\lambda f)^- = \int \lambda f^+ - \int \lambda f^- = \lambda \int f^+ - \lambda \int f^- =$$
$$= \lambda [\int f^+ \int f^-] = \lambda \int f.$$

00) $\lambda = -1$

$$(-f)^+ = f^-, \quad (-f)^- = f^+$$

Így

$$\int (-f) = \int (-f)^+ - \int (-f)^- = \int f^- - \int f^+ = -(\int f^+ - \int f^-) = -\int f.$$

000) $\lambda < 0$, akkor $\lambda = -|\lambda|$ alapján triviális.

4. tulajdonság: Monotonitás

Tétel: *Ha $f \leq g$ majdnem minden x-re és f, g integrálhatók, akkor*

$$\int f \leq \int g.$$

(Nem bizonyítjuk.)

5. tulajdonság

Tétel: *Ha f integrálható $\Rightarrow |f|$ integrálható, és $|\int f| \leq \int |f|$.*

Bizonyítás: Az $|f| = f^+ + f^-$ egyenlőség alapján triviális, ugyanis $\int |f| = \int f^+ + \int f^-$ és $\int |f| = \int |f|^+ - \int |f|^-$.

Vigyázat: Ha f, g integrálható $\overset{?}{\Rightarrow} f \cdot g$ integrálható. NEM!

De igaz a következő

6. tulajdonság

Tétel: *Ha f és g integrálható és $|f \cdot g| \leq h$, ahol h integrálható, akkor $f \cdot g$ is integrálható.*

(Nem bizonyítjuk.)

7. tulajdonság

Tétel: *Ha f integrálható és $\exists c > 0$ úgy, hogy $|f| \geq c$ majdnem minden x-re, akkor*

$$\frac{1}{f} \qquad \textit{integrálható.}$$

(Nem bizonyítjuk.)

Integrálható függvények sorozatainak viselkedése

Tétel (Beppo Levi tétele; 1906): *Legyen $g_n(x)$ integrálható függvények monoton növő sorozata, úgy, hogy $\{\int g_n\}$ korlátos legyen.*

Ekkor a $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) \Rightarrow g(x)$ (majdnem minden x-re véges) integrálható és $\lim \int g_n = \int \lim g_n (= \int g)$.

Bizonyítás: $\{g_n\} \uparrow \Rightarrow g_n - g_1 \geq 0$ és $g_n - g_1 \uparrow \Rightarrow$ vehető eleve: $g_n(x) \geq 0$ minden n-re.

Alkalmazzuk az I. lemmát: $g_n \geq 0$, mérhetőek és $\int g_n$ korlátos $\Rightarrow g_n \to g(x)$ majdnem minden x-re véges.

Most vegyük a II. lemmát:

$$\lim \int g_n = \int \lim g_n = \int g = \int g^+ - \underbrace{\int g^-}_{=0}$$

$$\int g_n \uparrow \text{ és korlátos } \Rightarrow \lim \int g_n \text{ véges} \Rightarrow \int g^+ \text{ véges}$$

$$\Rightarrow g \text{ integrálható és } \lim \int g_n = \int \lim g_n.$$

A továbbiakban az $f \in L$ jelölést használjuk arra, hogy az f Lebesgue-integrálható.

Tétel (Levi tétele sorokra): *Legyen $\{f_n\}$ függvénysorozat: $\forall\, n$-re $f_n \in L, f_n(x) \geq 0$ majdnem mindenütt és $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \int f_n$ konv. Ekkor $\sum\limits_{1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$ m.m. véges és $f \in L$, és $\sum\limits_{1}^{\infty} \int f_n = \int \sum\limits_{1}^{\infty} f_n = \int f$.*

Bizonyítás: Alkalmazzuk $s_n(x) = f_1(x) + \ldots + f_n(x)$-re B. Levi előző tételét.

Tétel (Lebesgue tétele): *Legyen* $\{f_n\}$ *olyan függvénysorozat:* $\forall\, n$*-re* $f_n \in L, \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *majdnem mindenütt és* $\exists\, g \in L$*, hogy majdnem minden* x*-re* $|f_n(x)| \leq g(x)$ *minden* n*-re.*
Ekkor $f \in L$ és $\lim \int f_n = \int \lim f_n = \int f$.

(Bizonyítását ld. Sz.-Nagy Béla: Valós függvények és függvénysorok c. könyvében.)

Tétel (Fatou-lemma): *Legyen* $f_n \in L\ \forall\, n$*-re,* $0 \leq f_n(x)\ \forall\, n$*-re és* $\exists \lim f_n(x) \overset{m.m.\ x}{=} f(x)$ *és* $\exists\, A$*, hogy* $\int f_n \leq A\ \forall\, n$*-re. Ekkor* $f \in L$ *és* $\int \lim f_n = \int f \leq A$*.*

(Bizonyítását ld. Sz.-Nagy Béla: Valós függvények és függvénysorok c. könyvében.)

Kapcsolat a Riemann-integrállal

Tétel: *Ha* $f \in R_{[a,b]}$*, akkor* $f \in L_{[a,b]}$ *és* $\overset{(L)}{\int} f = \overset{(R)}{\int} f$*.*

(Bizonyítását ld. Sz.-Nagy Béla: Valós függvények és függvénysorok c. könyvében.)

Megjegyzés: A Lebesgue-integrálható függvények osztálya bővebb, mint a Riemann-integrálható függvényeké, hiszen a

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad x \text{ racionális,} \\ 0, & \text{ha} \quad x \text{ irracionális} \end{cases}$$

ú.n. Dirichlet-függvény nem Riemann-integrálható például a $[0,1]$-intervallumon, hiszen $\underline{\int_0^1} \chi(x)dx = 0$, $\overline{\int_0^1} \chi(x)dx = 1$; ugyanakkor $\chi(x)$ Lebesgue-integrálható, ugyanis $\chi(x) \overset{\text{m.m.}}{=} 0$ ($\chi(x)$ lépcsős függvény, így integrálja a definícióval is adódik.)

A Riemann-integrálhatóság Lebesgue-kritériuma

Tétel: *Az* $[a,b]$*-n korlátos* f *függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható, ha* f *majdnem minden* x*-re folytonos* $[a,b]$*-n.*

(Bizonyítását ld. Sz.-Nagy Béla: Valós függvények és függvénysorok c. könyvében.)