Tételek az "Egyenlőtlenségek középiskolai alkalmazásokkal I."

c. kurzushoz

Bernoulli egyenlőtlenség I.

Ha $x \geq -1$*,* $n \in \mathbb{N}^+$*, akkor* $(1+x)^n \geq 1+nx$*.*

Ha $n > 1$*, akkor* "=" $\iff \quad x = 0$

Bizonyítás.(*teljes indukciós bizonyítás.*)

$n = 1$ igaz

Tegyük fel, hogy $n = k$-ra teljesül:

$$(1+x)^k \geq 1+kx$$

Kérdés: $k+1$-re teljesül-e, azaz $(1+x)^{k+1} \overset{?}{\geq} 1+(k+1)x$

$(1+x)^k \geq 1+kx \quad / \cdot (1+x) \geq 0$

$\underline{(1+x)^{k+1}} \geq (1+kx)(1+x) = 1+(k+1)x + \underbrace{kx^2}_{\geq 0} \geq \underline{1+(k+1)x}$

"=" $\iff \quad x = 0$ ha $x \neq 0$ akkor itt $>$ van

Bernoulli-egyenlőtlenség II.

$(1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x$*, ha* $\begin{matrix} \alpha > 1 \\ \alpha \in \mathbb{R} \end{matrix}$, $x \geq -1$ "=" $\iff \quad x = 0$

Bizonyítás.A) *elemi bizonyítás.*

1. lépés $\alpha = \frac{p}{q}$ rac. $p > q$, $p, q \in \mathbb{N}$

$$\frac{\overbrace{(1+\alpha x)+\ldots+(1+\alpha x)}^{q} + \overbrace{1+\ldots+1}^{p-q}}{p} \geq \sqrt[p]{(1+\alpha x)^q}$$

(ha $1+\alpha x < 0$, akkor a Bernoulli egyenlőtlenség II. triviális)

$$\frac{q + \overbrace{q\alpha}^{p} x + p - q}{p} \geq \sqrt[p]{(1+\alpha x)^q}$$

$$\frac{px+p}{p} = 1+x \geq \sqrt[p]{(1+\alpha x)^q}$$

$$(1+x)^{\frac{p}{q}} \geq 1+\alpha x$$

"=" $\iff 1+\alpha x = 1 \quad \iff \quad x=0$

2. lépés: $\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges

Legyen $\frac{p_n}{q_n} \to \alpha(>1) \Rightarrow \frac{p_n}{q_n} > 1$ valahonnét kezdve. (és $\frac{p_n}{q_n}$ rac.)

$$\underbrace{(1+x)^{\frac{p_n}{q_n}}} \geq 1+\frac{p_n}{q_n}x \quad \text{(ld. 1. lépés)}$$

$$\downarrow \ \text{def.} \qquad\qquad \downarrow \ \text{soroatokra von. tétel szerint}$$

$$(1+x)^{\alpha} \quad \geq \quad 1+\alpha x.$$

" = " $\quad \iff \quad x=0$, ugyanis

$\alpha > 1 \quad \alpha > r > 0 \quad r \in \mathbb{Q}$

$\frac{\alpha}{r} > 1$ és $x \neq 0$.

$(1+x)^{\frac{\alpha}{r}} \geq 1+\frac{\alpha}{r}x \quad \iff \quad (1+x)^{\alpha} \geq (1+\frac{\alpha}{r}x)^r > (1+r\frac{\alpha}{r}x) = 1+\alpha x.$

Tehát ha $x \neq 0$, akkor $>$ van

B) "nem elemi bizonyítás" (*függvény diszkusszió*)

$\alpha > 1, x \geq -1, \quad (1+x)^{\alpha} \geq 1+\alpha x$

$g(x) = (1+x)^{\alpha} - \alpha x - 1 \geq 0$

$g(x) \geq 0, \quad -1 \leq x$ ezt kell bebizonyítani.

1.) $g'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha \geq 0$, ha $0 \leq x$, ugyanis

$$(\underbrace{1+x}_{>1})^{\alpha-1} \geq 1 \quad \Rightarrow g \uparrow a(0;\infty) - \text{en}$$

2) ha $x \in (-1,0)$, $g'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha \leq 0$, mert

$$(1+x)^{\alpha-1} \leq 1 \quad \Rightarrow g \downarrow \quad (-1,0)$$

Azaz $g(x) \geq 0$ minden $x > -1$ esetén

Bernoulli-egyenlőtlenség III.

$(1+x)^{\alpha} \leq 1+\alpha x$, ha $0<\alpha<1$, $x \geq -1$.

Bizonyítás.

$(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} \geq 1+\frac{1}{\alpha}\cdot\alpha x = 1+x \quad \frac{1}{\alpha} > 1$, ebből

$(1+\alpha x) \geq (1+x)^{\alpha}$.

Számtani-; mértani- és harmonikus közép

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ nemnegatív számok

$A_n = \frac{a_1+\ldots+a_n}{n}$ aritmetikai vagy számtani közép

$G_n = \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}$ geometriai vagy mértani közép

Ha $a_i > 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n \quad H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$ harmonikus közép.

Tétel. $A_n \geq G_n$, "=" $\iff \quad \forall i, j \quad a_i = a_j \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$

1. Bizonyítás: (*Cauchy*) *regresszív indukció*

1. lépés: $k = 2$-re igaz
2. lépés: $2^n \to 2^{n+1}$
3. lépés: $m \to m-1$

<u>1. lépés</u>:

$$\frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}, \; \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 \geq a_1 a_2 \quad \iff \quad (a_1-a_2)^2 \geq 0$$

$$" = " \quad \iff \quad a_1 = a_2$$

<u>2. lépés</u>: tegyük fel, hogy 2^n-re igaz, kérdés: 2^{n+1}-re igaz-e?

$$A_{2^{n+1}} = \frac{\overbrace{a_1+a_2+\ldots+a_{2^n}}^{2^n \text{ db}} + \overbrace{a_{2^n+1}+\ldots+a_{2^{n+1}}}^{2^n \text{db}}}{2^{n+1}} =$$

$$= \frac{\frac{a_1+\ldots+a_{2^n}}{2^n} + \frac{a_{2^n+1}+\ldots+a_{2^{n+1}}}{2^n}}{2} \underset{\substack{\text{ind.}\\ \text{felt.}}}{\geq} \frac{\sqrt[2^n]{a_1 \ldots a_{2^n}} + \sqrt[2^n]{a_{2^n+1} \ldots a_{2^{n+1}}}}{2} \overset{\geq}{=} n = 2 \;\; \text{eset}$$

$$\geq \sqrt{\sqrt[2^n]{a_1 \ldots a_{2^n}} \cdot \sqrt[2^n]{a_{2^n+1} \ldots a_{2^{n+1}}}} = \sqrt[2^{n+1}]{a_1 \ldots a_{2^{n+1}}} = G_{2^{n+1}}.$$

<u>3. lépés</u>: Tegyük fel, hogy m-re igaz, kérdés: $m-1$-re igaz-e?

Tudjuk $A_m \geq G_m$, $G_{m-1} = \sqrt[m-1]{a_1, \ldots, a_{m-1}} \overset{?}{\leq} \frac{a_1+\ldots+a_{m-1}}{m-1} = A_{m-1}$

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{m-1}+G_{m-1}}{m} \overset{\geq}{\text{ind. felt.}} \sqrt[m]{a_1 \ldots a_{m-1} G_{m-1}} = \sqrt[m]{G_{m-1}^{m-1} \cdot G_{m-1}} = G_{m-1} \blacksquare$$

$$\Rightarrow \; a_1 + a_2 + \ldots + a_{m-1} + G_{m-1} \geq mG_{m-1}$$

$$a_1 + \ldots a_{m-1} \geq (m-1)G_{m-1}$$

$$A_{m-1} \geq G_{m-1}.$$

Bizonyítás."=" $\Longleftrightarrow$ minden elem egyenlő

"$\Leftarrow$" triviális

"$\Rightarrow$" "=" $\overset{?}{\Rightarrow}$ minden elem egyenlő

Tegyük fel, hogy "=" és $\exists\, a_1 \neq a_2$

$A_n = G_n$ (feltétel)

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \frac{\frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_1+a_2}{2} + a_3 + \ldots a_n}{n} \geq \sqrt[n]{\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 a_3 \ldots a_n} >$$
$$> \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot a_3 \ldots a_n} = G_n \quad \text{(ellentmondás)}$$

Tétel: $A_n \geq G_n$; "=" $\Longleftrightarrow \; \forall i,j \;\; a_i = a_j \quad (i,j = 1,2,\ldots,n)$

2. Bizonyítás: (*Riesz Frigyes*)

Ha $a_1 = a_2 = \ldots = a_n \;\Rightarrow\;$ "="

Ha nem, akkor a_1 jelölje a legkisebbet, a_2 a legnagyobb elemet

$na_1 < a_1 + \ldots + a_n < na_2$

$a_1 < A_n < a_2$ az átlag a legkisebb és a legnagyobb szám közé esik

1. lépés

Meg kéne változtatni az a_1, a_2-t úgy, hogy a számtani közép ne változzon, a mértani növekedjen. Ha ezt sok lépésben megcsinálom, elérek oda, hogy mind egyenlő, a számtani nem változik, mértani nőtt, akkor $A_n \geq G_n$.

$a_1 \to A_n \overset{\text{jel}}{=} a_1'$

$a_2 \to a_1 + a_2 - A_n \overset{\text{jel}}{=} a_2'$

ide olyat akarok írni, hogy $a_1' + a_2' = a_1 + a_2$ legyen

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \frac{a_1' + a_2' + \ldots + a_n}{n}$$

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \ldots a_n} \overset{?}{<} \widetilde{G}_n = \sqrt[n]{a_i' \cdot a_2' \ldots a_n}$$

Kérdés:

$$a_1 \cdot a_2 \overset{?}{<} a_1' \cdot a_2' = A_n(a_1 + a_2 - A_n) \quad (*)$$

$$\Updownarrow$$

$$0 < A_n a_1 + A_n a_2 - A_n^2 - a_1 \cdot 2$$

$$0 < (A_n - a_1)(a_2 - A_n), \text{tehát } (*) \text{ áll.}$$

Az 1. lépésben növekedett a mértani közép.

1. lépés után: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \to A_n, a_2', a_3, \ldots a_n$.

2. lépés: $A_n, A_n, a_3', \ldots, a_n$, azaz

A_n-t hagyom, a legkisebbet és a legnagyobbat kicserélem. (mi van, ha A_n a legkisebb? - nem lehet, mert az átlag a legkisebb és a legnagyobb szám közé esik).

Számtani marad, mértani nő

<u>elérem</u>: $A_n, A_n, \ldots, A_n$ minden elem egyenlő

minden lépésnél A_n marad, G_n nő, azaz

$$A_n = \widetilde{G}_n > \ldots > \widetilde{G}_n > G_n$$

3. Bizonyítás:

Segédtétel: $e^x \geq 1 + x$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

Bizonyítás.

$$\begin{array}{llll} & e^x - 1 - x & = f(x) \quad\quad f(x) \geq 0 & \text{ezt kell biz.ni} \\ & e^x - 1 & = f'(x) \geq 0 \quad x \geq 0 & f \uparrow \\ \text{a)} & e^x & \geq 1 & \Rightarrow f(x) \geq 0 \text{ (mivel } f(0) = 0) \\ & e^x - 1 & = f'(x) \leq 0 \quad x \leq 0 & f \downarrow \\ & e^x \leq 1 & & \end{array}$$

b) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \underbrace{\frac{e^\xi}{2!}x^2}_{\geq 0} \quad \Rightarrow e^x \geq 1 + x$ (Taylor-polinomból)

$$0 < \xi < x$$

c) $x > 0$ Lagrange t.

$\frac{e^x - 1}{x - 0} = e^c > 1 \quad 0 < c < x$

$e^x - 1 > x \quad \Rightarrow e^x > 1 + x$.

Ha $x < 0$,
$\frac{e^x - e^0}{x-0} = e^c < 1 \quad x < c < 0$
$e^x - 1 > x \quad \Rightarrow e^x > 1 + x$ teljesül.

$e^{y-1} \geq y$, ha $x + 1 = y$
y helyére írjunk: $\frac{a_1}{A_n}, \dots, \frac{a_n}{A_n}$.
Ekkor:
$e^{\frac{a_1}{A_n} - 1} \geq \frac{a_1}{A_n}$
$\vdots \qquad \vdots$
$e^{\frac{a_n}{A_n} - 1} \geq \frac{a_n}{A_n}$ (szorozzuk össze ezeket)
.

$$\Rightarrow e^{\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{A_n} - n} \geq \frac{a_1 \ldots a_n}{A_n^n}$$
$$1 = e^0 \geq \frac{a_1 \ldots a_n}{A_n^n}$$
$$A_n \geq \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} = G_n$$

ez is látszik: ha valamelyik helyen éles $>$ van, akkor a végén is.

Tétel: $A_n \geq G_n$; "=" $\iff \forall i, j \;\; a_i = a_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$

4. Bizonyítás: (*indirekt bizonyítás*)

Tegyük fel hogy $\exists\, a_1, \dots, a_n$ nemnegatív szám n-es, amelyre: $A_n < G_n$
Segédtétel: $x > 0$ esetén $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \uparrow$

Bizonyítás.
a) L.L. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \uparrow$ (binominális tétellel).
b) $f(z) = \left(1 + \frac{x}{z}\right)^z \quad \uparrow \quad 0 < x$ rögzített
$z \to \infty$
(n helyett vesznek egy folytonos változót)

$$f'(x) = [e^{z \ln(1 + \frac{x}{z})}]' = \underbrace{(1 + \frac{x}{z})^z}_{>0} \overbrace{\underbrace{\left(\ln(1 + \frac{x}{z}) + z \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{z}}(-\frac{x}{z^2})\right)}_{\overset{>}{?}0}}^{(*)} \overset{?}{>} 0$$

$$(*) = \ln\left(1+\tfrac{x}{z}\right) - \tfrac{x}{z+x} \overset{?}{>} 0 \qquad \begin{matrix} x > 0 \\ z \to \infty \end{matrix} \quad \tfrac{x}{z} = t > 0$$

$$(*) = \underbrace{\ln(1+t) - \frac{t}{1+t}}_{\substack{g(t) \\ g(0)=0}} \overset{?}{>} 0$$

$$g'(t) = \frac{1}{1+t} - \frac{1+t-t}{(1+t)^2} = \frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2} > 0 \quad t > 0$$

$$1+t < (1+t)^2 \qquad g(t) \uparrow$$

$\Rightarrow \quad g(t) > 0 \quad t > 0$

$\Rightarrow \quad f(z) \ \uparrow \quad z \to \infty$

spec. $(1+\frac{x}{n})^n \uparrow$

Eredeti tétel bizonyítása:

Tegyük fel hogy

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} > \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}, \quad \text{feltehetjük} : a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$$

$$a_1 \ldots + a_n > \left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right)^n = \left(\frac{a_1 + \ldots a_n - na_n + na_n}{n}\right)^n =$$

$$= \left(\frac{a_1 + \ldots + a_{n-1} - (n-1)a_n}{n} + a_n\right)^n = a_n^n\left(1 + \frac{a_1 + \ldots + a_{n-1} - (n-1)a_n}{na_n}\right)^n$$

$$= a_n^n\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \quad \overset{>}{\text{segedtetel}} \quad a_n^n\left(1+\frac{x}{n-1}\right)^{n-1} =$$

$[x > 0,$ (nem lehet mind egyenlő, mert akkor "=" van, tudjuk)]

$$= a_n\left(a_n + \frac{xa_n}{n-1}\right)^{n-1} = a_n\left(a_n + \frac{a_1 + \ldots + a_{n-1} - (n-1)a_n}{a_n} \cdot \frac{a_n}{n-1}\right)^{n-1} =$$

$$= a_n\left(a_n + \frac{a_1 + \ldots + a_{n-1} - (n-1)a_n}{n-1}\right)^{n-1} = a_n\left(\frac{a_1 + \ldots + a_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1} \Rightarrow$$

$a_1 \ldots a_{n-1} > \left(\frac{a_1 + \ldots + a_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1}$

$\sqrt[n-1]{a_1 \ldots a_{n-1}} > \frac{a_1 + \ldots + a_{n-1}}{n-1}$, azaz

$G_n > A_n \quad \Rightarrow \quad G_{n-1} > A_{n-1} \quad \Rightarrow \ldots \Rightarrow \quad a_1 > a_1$ (ellentmondás)

vagy középiskolában: $G_n > A_n \Rightarrow \ldots \Rightarrow G_2 > A_2$

$\sqrt{a_1 a_2} > \frac{a_1 + a_2}{2}$ (ellentmondás)

Hatványközepek

Tétel: $\sqrt{\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \overset{?}{\geq} \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \quad a_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \ldots, n$

$$"=" \iff \quad \forall i,j \;\; a_i = a_j \quad i,j = 1,\ldots,n$$

Bizonyítás. $0 \le \sum_{j>k\ge 1}^{n}(a_j - a_k)^2 = (n-1)(a_1^2 + \ldots + a_n^2) \; - 2\sum_{j>k\ge 1}^{n} a_j a_k$

$"=" \iff \quad \forall i,j \quad a_i = a_j$

$$\begin{array}{lll}
(n-1)a_1^2 & (a_1-a_2)^2 + (a_1-a_2)^2 + \ldots & +(a_1-a_n)^2 \\
(n-1)a_2^2 & (a_2-a_3)^2 + \ldots & +(a_2-a_n)^2 \\
\vdots & (a_3-a_4)^2 + \ldots & +(a_3-a_n)^2 \\
 & \vdots & \vdots
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \underbrace{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + 2\sum_{j>k\ge 1}^{n} a_j a_k}_{} &\le n(a_1^2 + \ldots + a_n^n) \\
(a_1 + \ldots + a_n)^2 &\le n(a_1^2 + \ldots + a_n^2) \qquad /:n^2 \\
\frac{(a_1 + \ldots + a_n)^2}{n^2} &\le \frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n} \\
\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} &\le \sqrt{\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n}}.
\end{aligned}$$

Tétel: $\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} \ge \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ ha $a \ge 0, b \ge 0$

I. Bizonyítás: Be kell bizonyítani, hogy

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{a^3+b^3}{2}\Big)^2 &\ge \Big(\frac{a^2+b^2}{2}\Big)^3 \quad (*) \\
\iff \; 2(a^3+b^3)^2 &\ge (a^2+b^2)^3, \\
\iff \; 2a^6 + 4a^3b^3 + 2b^6 &\ge a^6 + 3a^4b^2 + 3b^4a^2 + b^6, \\
\iff \; a^6 + b^6 + 4a^2b^3 - 3a^4b^2 - 3a^2b^4 &\ge 0, \\
\iff \; a^6\Big[1 + (\frac{b}{a})^6 + 4(\frac{b}{a})^3 - 3(\frac{b}{a})^2 - 3(\frac{b}{a})^4\Big] &\ge 0 \quad \frac{b}{a} = 1 \quad \text{gyöke}
\end{aligned}$$

$1 + y^6 + 4y^3 - 3y^2 - 3y^4 = 0$ $\qquad (y-1)$ kiemelhető, azaz

$\left(\frac{b}{a} - 1\right)$ kiemelhető, azaz $(b-a)$ kiemelhető.

$(a-b)(a^5 + a^4b - 2a^3b^2 + 2a^2b^3 - ab^4 - b^5) \ge 0$ $\qquad$ (polinomosztás!)

Innét kiemelhető $a-b$:

$$\underbrace{(a-b)^2}_{\ge 0}(\underbrace{a^4 + 2a^3b + 2ab^3 + b^4}_{\ge 0}) \ge 0 \qquad a,b \ge 0, \text{azaz} \;\; \text{teljesül}(*)$$

II. Bizonyítás: Tudjuk, hogy konvex görbére fennáll, hogy

$$f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \le \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Ezek után alkalmazva az $x = a^2$, $y = b^2$ jelöléseket, adódik:
$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} \ge \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \iff$
$\iff \sqrt[3]{\frac{a^3+y^3}{2}} \ge \sqrt{\frac{x+y}{2}} \iff$
$\iff \sqrt[3]{\frac{x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}}{2}} \ge \sqrt{\frac{x+y}{2}} \iff \frac{x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}}{2} \overset{?}{\ge} \Big(\frac{x+y}{2}\Big)^{\frac{3}{2}}$ (*)
Viszont $f(t) = t^{\frac{3}{2}}$ konvex, mert

$$(t^{\frac{3}{2}})'' = \Big(\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}\Big)' = \frac{3}{4}t^{-\frac{1}{2}} > 0 \quad t > 0$$

$\Rightarrow$ konvex, azaz (*) teljesül.

Tétel: $\sqrt[k]{\frac{a^k+b^k}{2}} \le \sqrt[k+1]{\frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}}$, ha $k \in \mathbb{N}^+$ és $a, b \ge 0$

Bizonyítás: Itt is legyen $x = a^k$, $y = b^k$, ekkor

$$\sqrt[k+1]{\frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}} \ge \sqrt[k]{\frac{a^k+b^k}{2}} \qquad a^k = x,\ b^k = y$$

$$\sqrt[k+1]{\frac{x^{\frac{k+1}{k}}+y^{\frac{k+1}{k}}}{2}} \ge \sqrt[k]{\frac{x+y}{2}}$$

$$\frac{x^{\frac{k+1}{k}}+y^{\frac{k+1}{k}}}{2} \ge \Big(\frac{x+y}{2}\Big)^{\frac{k+1}{k}} \quad (*)$$

Mivel
$f(t) = t^{\frac{k+1}{k}} = t^{1+\frac{1}{k}}$ konvex, ugyanis
$(t^{1+\frac{1}{k}})' = ((1+\frac{1}{k})t^{\frac{1}{k}})' = \frac{k+1}{k} \cdot \frac{1}{k}\ t^{\frac{1}{k}-1} > 0$, $t > 0$ esetén, ezért (*) áll.

Csebisev-egyenlőtlenség

Definíció. Az $a, \ldots, a_n$ és $b, \ldots, b_n$ szám n-esek ugyanúgy rendezettek, ha $\forall\ i, j$ esetén $(a_i - a_j)\ (b_i - b_j) \ge 0$; ellentétesen rendezettek, ha "≤ 0" szerepel.

Tudjuk: A $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ akkor maximális, ha ugyanúgy rendezettek és minimális, ha ellentétesen vannak rendezve (ezt a tételt **rendezési tételnek** nevezzük).

Legyen $x_1, x_2, \ldots, x_n,\ y_1, y_2, \ldots, y_n$ két azonosan rendezett számsorozat. Ekkor a rendezési tétel szerint

$$x_1y_1 + \ldots + x_ny_n = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$$
$$x_1y_1 + \ldots + x_ny_n \geq x_1y_2 + x_2y_3 + \ldots + x_ny_1$$
$$x_1y_1 + \ldots + x_ny_n \geq x_1y_3 + x_2y_4 + \ldots + x_ny_2$$
$$\vdots$$
$$x_1y_1 + \ldots + x_ny_n \geq x_1y_n + x_2y_1 + \ldots x_ny_{n-1}$$

+

Így

$$n\sum_{i=1}^{n} x_iy_i \geq x_1\sum_{i=1}^{n} y_i + x_2\sum_{i=1}^{n} y_i + \ldots + x_n\sum_{i=1}^{n} y_i$$
$$n\sum_{i=1}^{n} x_iy_i \geq \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \quad / : n^2$$
$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_iy_i}{n} \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} \quad (*)$$

(a szorzatok számtani közepe $\geq$ mint az egyes tényezők számtani közepének a szorzata.)

Megjegyzés: Ha ellentétesen rendezett a két sorozat, akkor az egyenlőtlenség megfordul

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_iy_i}{n} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} \quad (**)$$

A (*) és (**) egyenlőtlenségeket **Csebisev-egyenlőtlenségnek** nevezzük.

Tétel (*Cauchy-egyenlőtlenség*): Ha $\underbrace{x_1, \ldots, x_n}_{X}$ és $\underbrace{y_1, \ldots, y_n}_{Y}$ valós számok két tetszőleges szorzata, akkor

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\Big| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} \quad (\Longleftrightarrow \quad |(X,Y)| \leq \|X\| \cdot \|Y\|)$$

Bizonyítás. Legyen a tetszőleges paraméter

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - ay_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2a\sum_{i=1}^{n} x_iy_i + a^2\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = f(a)$$

másodfokú függvény, ha $\sum_{i=1}^n y_i^2 \neq 0$.

Ha $\sum_{i=1}^n y_i^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow y_i = 0$ ha $i = 1, \ldots, n$ akkor triviálisan fönnáll az eredeti egyenlőtlenség.

Ha $\sum_{i=1}^n y_i^2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad f(a)$ másodfokú függvény és mivel $f(a) \geq 0$ $\forall a$-ra, ezért $D \leq 0$ kell hogy legyen, azaz

$$4\Big(\sum_{i=1}^n x_i y_i\Big)^2 - 4\Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^n y_i^2\Big) \leq 0$$

$$\Big(\sum_{i=1}^n x_i y_i\Big)^2 \leq \Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^n y_1^2\Big)$$

$$\Big|\sum_{i=1}^n x_i y_i\Big| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2},$$

amit éppen bizonyítani akartunk.

Megjegyzés: "=" $\Longleftrightarrow \forall i = 1, 2, \ldots, n \quad x_i = a y_i \quad \frac{x_i}{y_i} = a$, azaz - a 2 vektor egymásnak konstansszorosa.

Tétel: Ha $f(x)$ az $[a, b]$-n J-konvex, akkor $\forall \quad a \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leq b$ esetén:

$$f\Big(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\Big) < \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n}$$

Bizonyítás.

a) $2^n \to 2^{n+1}$

b) $n \to n - 1$

a)

$$f\Big(\frac{x_1 + \ldots + x_{2^n} + x_{2^n+1} + \ldots + x_{2^{n+1}}}{2^{n+1}}\Big) =$$

$$= f\Big(\frac{\frac{x_1 + \ldots + x_{2^n}}{2^n} + \frac{x_{2^n+1} + \ldots + x_{2^{n+1}}}{2}}{}\Big) \text{ mivel } fJ \overset{<}{-} \text{konvex}$$

$$< \frac{f\Big(\frac{x_1 + \ldots + x_{2^n}}{2^n}\Big) + f\Big(\frac{x_{2^n+1} + \ldots + x_{2^{n+1}}}{2^n}\Big)}{2} \text{ ind. feltetel} \overset{<}{} \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_{2^{n+1}})}{2^{n+1}}$$

b)

$$f\Big(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + \frac{x_1 + \ldots + x_{n-1}}{n-1}}{n}\Big) < \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + f\Big(\frac{x_1 + \ldots + x_{n-1}}{n-1}\Big)}{n}$$

$$f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_{n-1}}{n-1}\right) < \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})}{n} + \frac{f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_{n-1}}{n-1}\right)}{n} \;\Rightarrow$$

$$\underbrace{(1 - \frac{1}{n})}_{\frac{n-1}{n}} f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_{n-1}}{n-1}\right) < \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})}{n} \Rightarrow$$

$$f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_{n-1}}{n-1}\right) < \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})}{n-1}.$$