A végtelenről a matematikatanítás különböző szintjein

"A matematikaoktatás jelene és jövője"
Konferencia
Békéscsaba
2012. október 12-13.

Dr. Németh József egyetemi docens
SZTE TTIK Bolyai Intézet
Analízis Tanszék
http://www.math.u-szeged.hu/~nemethj

Pólya György: ”Ha a tudomány valamelyik területét (vagy elméletét, vagy fogalmát) tanítjuk, akkor az emberpalántáknak nagy lépésekkel nyomon kell követniük az emberiség szellemi fejlődését.”

A végtelen a matematikában:

$\alpha)$ $1, 2, 3, 4, \ldots$

$\beta)$ $0,\dot{1}\dot{3} = \dfrac{13}{100} + \dfrac{13}{10^4} + \cdots$

$\gamma)$ ”Csoki”: $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \cdots = 1$

$\delta)$ ”Torta”: $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{3^3} + \cdots = ?$

$$A = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots = \frac{1}{2}$$

$$B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{3^3}{+} \cdots = \frac{1}{2}$$

Ellentmondásos; vitatott, misztikus

”Mindig nagy falatnak tűnt”

”Megosztotta a matematikusokat” (Kell-e? Dobjuk el!)

”A végtelent legjobb elkerülni” (Galilei)

”Ősidők óta semmi sem kavarja fel annyira az emberi értelmet, mint a végtelen kérdése” (Hilbert)

”Hővezetési probléma - Fourier (XIX. század!!)

Példák (ellentmondások, meghökkentő dolgok a végtelent tekintve)

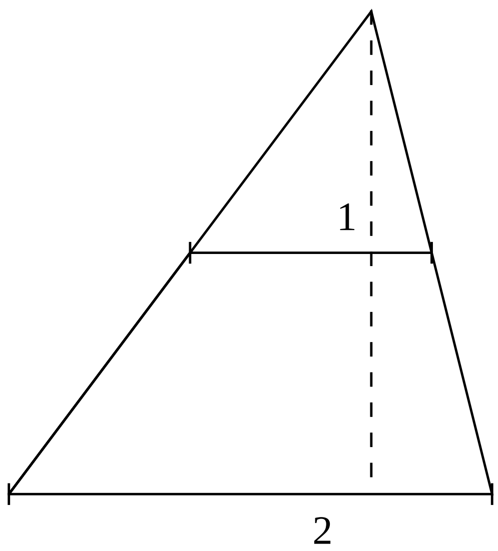
a) Galilei-féle paradoxon:

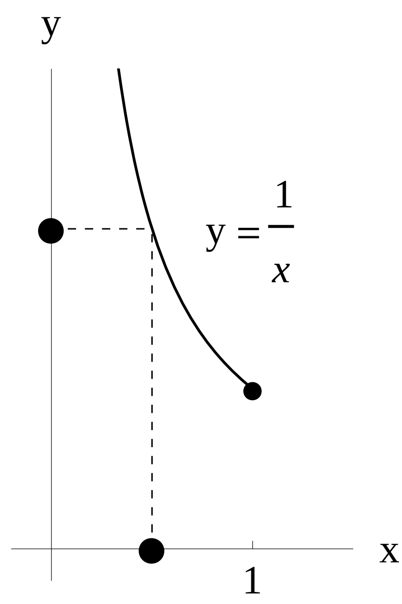
$$\begin{gathered} 1 \leftrightarrow 2 \\ 2 \leftrightarrow 4 \\ 3 \leftrightarrow 6 \\ \vdots \end{gathered}$$

(kölcsönösen egyértelmű, akkor "ugyanannyi" elem, Kalmár-lovasok)

Paradoxon? Ellentmondás? Rész–egész régi felfogása?

[Sőt $[0;1]$ és $[0;2]$ példája]

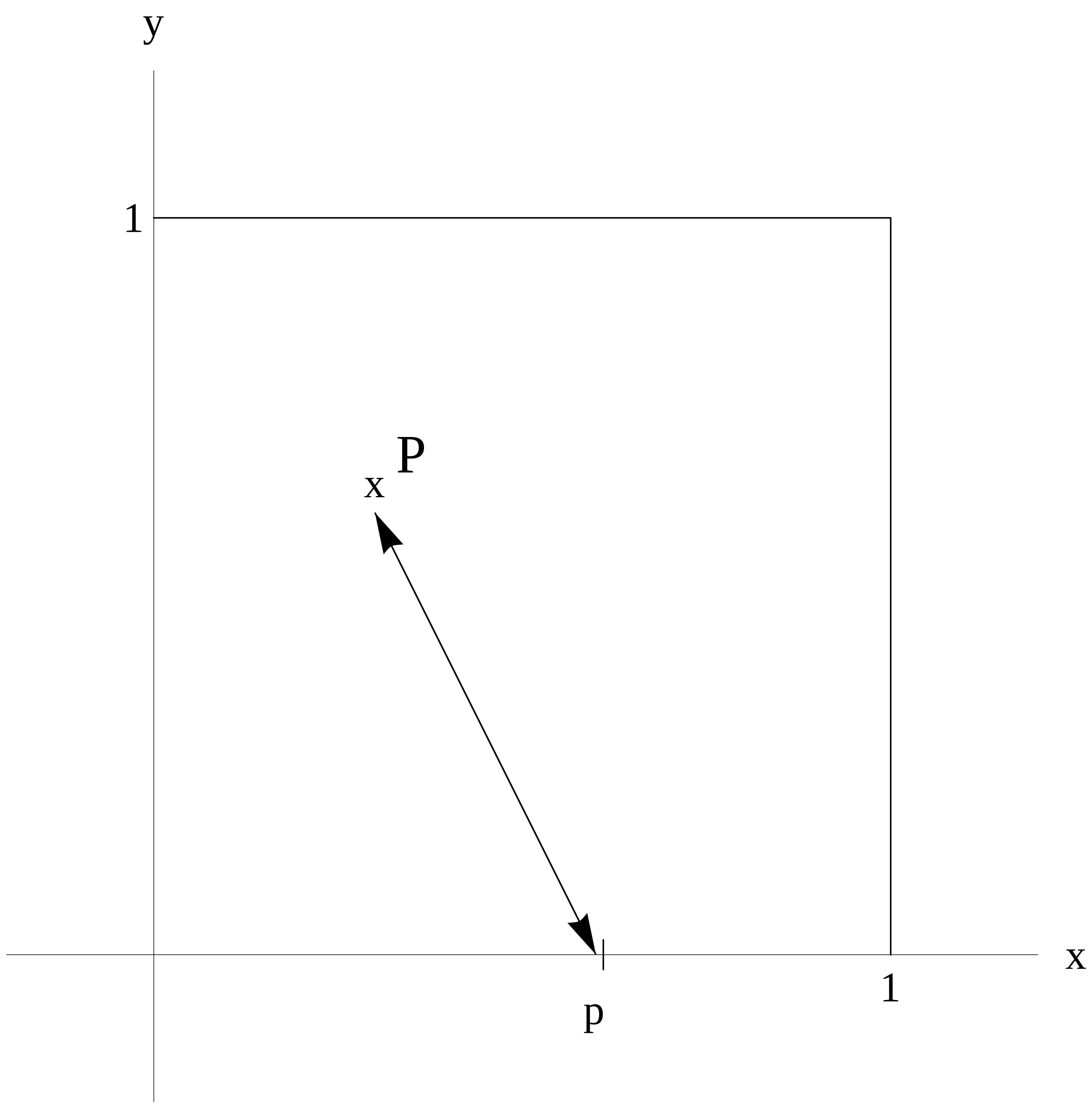




b) $(0;1]$ szakasznak "ugyanannyi" pontja van, mint $[1;\infty)$ félegyenesnek (ld. $y = \dfrac{1}{x}$ grafikonja) (vagy $(-1;1)$ és $(-\infty;\infty)$, $y = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}x$ vagy $y = \dfrac{x}{1+|x|}$).

c) $[0;1]$ szakasznak "annyi" pontja van, mint az **egységnégyzetnek**, ill. az egész síknak.
A *módszer*:

$$P = (0,a_1a_2\dots;0,b_1b_2\dots) \xleftrightarrow{\text{k.e.}} 0,a_1b_1a_2b_2\dots = p$$



Definíció: (ami ”*feloldja az ellentmondást*”, ami abból adódik, hogy a végesre igaz szabályokat akartuk a végtelenre ”erőszakolni” (u.i.: a rész és egész problémáját)

Egy halmazt végtelen halmaznak nevezünk, ha van olyan valódi részhalmaza, amellyel

a halmaz ekvivalens (azaz ”ugyanannyi” pontja van).

(Ellenkező esetben *véges*.)

[Kihúztuk a ”paradoxonok” méregfogát.]

d) $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ (természetes számok)

$\left\{\dfrac{p}{q}\right\}$: racionális számok

A racionális számok ”ugyanannyian” vannak, mint a természetes számok (azaz **Megszámlálhatóan** végtelen sokan vannak) (**Számosság**)

Ábra:

$$\begin{matrix} \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \cdots \end{matrix}$$

(innen a **negatívak** is és utána **az összes**)

e) Racionális számok lefedhetők 1 mm hosszú *piros cérnával* (”potenciális végtelen”)

$1 \text{ mm} \stackrel{\text{jel}}{=} \varepsilon$

$\{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\}$

$r_1 \to \dfrac{\varepsilon}{2},\ r_2 \to \dfrac{\varepsilon}{2^2}, \ldots, r_n \to \dfrac{\varepsilon}{2^n}, \ldots$

Így: $\varepsilon\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\right)=1\cdot\varepsilon$ (ld. "csoki").

f) Van-e olyan, aminek "több" pontja van, mint a *term. számok* (ill. racionális számok) (azaz *nem megszámlálható*)

Igen: **Valós számok** (CANTOR)

Módszere: (a $(0;1)$ intervallum összes (valós) pontjára)

Indirekt:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0,u_{11}u_{12}\ldots\\
x_2 &= 0,u_{21}u_{22}\ldots\\
&\vdots\\
x_n &= 0,u_{n1}u_{n2}\ldots\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

(pl.: $0,5=0,499\ldots$-et vegyük)

Legyen $y=0,v_1v_2v_3\ldots$, ahol legyen $v_n=2$, ha $u_{nn}=1$ és legyen $v_n=1$, ahol $u_{nn}\neq 1$.

Ha pl. $y=x_n=0,u_{n1}u_{n2}\ldots\underline{\underline{u_{nn}}}\ldots$

Elnevezés: *Kontinuum-számosságú* (valós számoké)

Problémák: Van-e a megszámlálható és a kontinuum között? (Kontinuum-hipotézis)

Gödel (1940): nem cáfolható; Cohen (1963): nem bizonyítható.

Van-e a kontinuumnál nagyobb számosság? (Azaz van- e olyan halmaz, amelynek ”több” eleme van, mint a valós számok.)

Igen: Az összes részhalmazok számossága nagyobb, mint a halmazé. [Pl. valós függvények]

Néhány további ”furcsaság”, ”vitára okot adó” probléma

α) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}+\cdots=1$

β) $1-1+1-1+1-1+\cdots=?$ (Leibniz)

Összeg: $0; 1; \dfrac{1}{2}$

Sőt: $\dfrac{1}{1+x+x^3}=\dfrac{1-x}{1-x^3}=1-x+x^3-x^4+x^6-\cdots\Rightarrow\dfrac{1}{3}=1-1+1-1+\cdots$

(Dobjuk el!!) (Vigyázat! Akkor eldobjuk a tizedes törteket.)

$\gamma)$ *További*

$$
\begin{array}{rl}
1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+ & =A \\
0+1+0-\frac{1}{2}+0+\frac{1}{3}+0-\frac{1}{4}+0+ & =A \\
0+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{6}+0-\frac{1}{8}+0+ & =\frac{A}{2} \\
\hline
\end{array}
$$

$(1)+(3):$

$$1+0+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+0+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\quad=\frac{3}{2}A$$

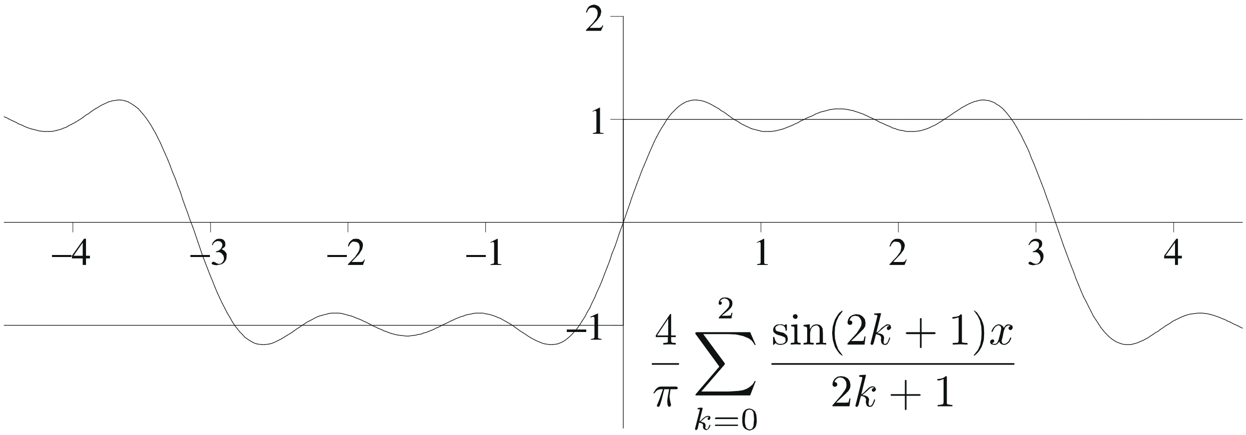
$\Rightarrow$

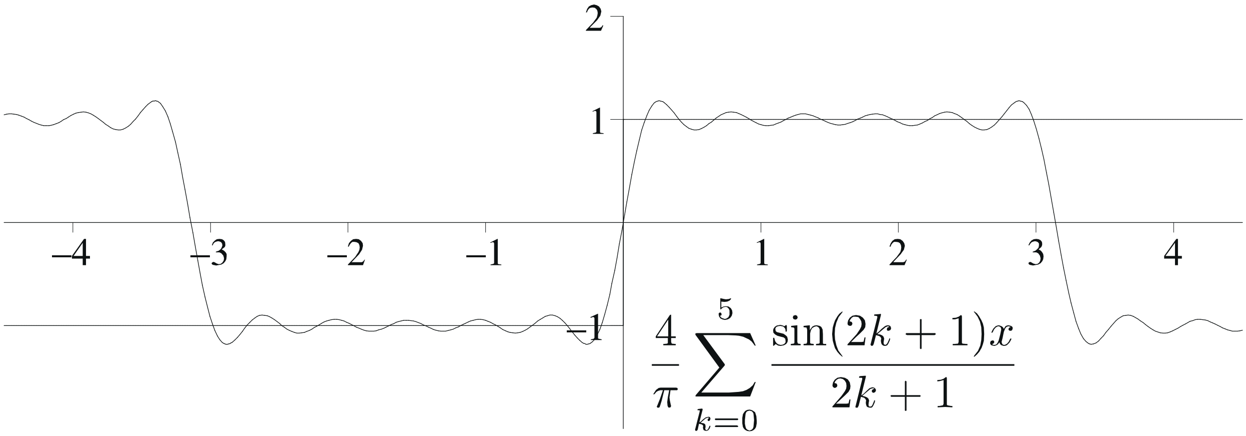
$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\quad=\frac{3}{2}A\neq A.$$

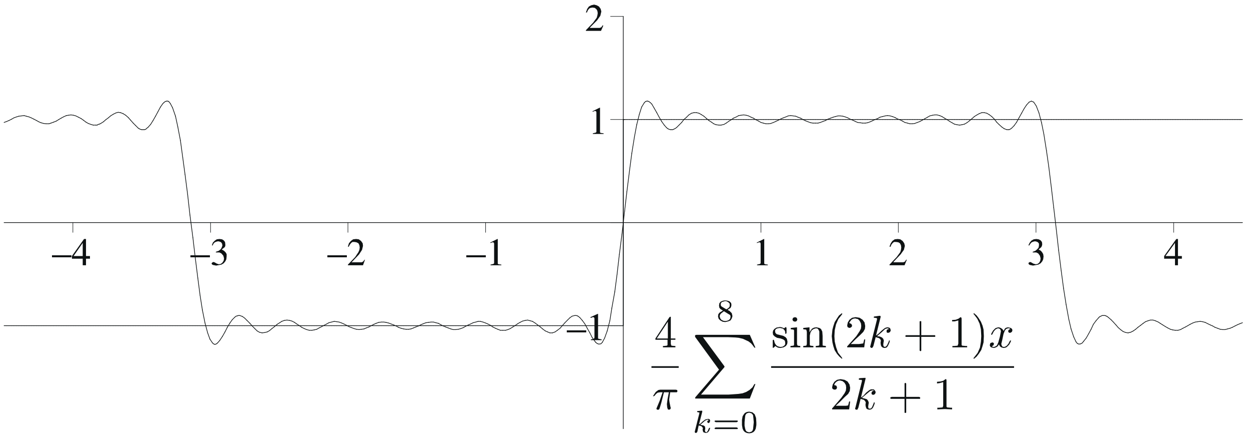
(Dobjuk el!!)
Megjegyzés: $A=\ln 2=\log_{e^2}$

$\delta)$ $\operatorname{sgn} x=\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\cdots\right)$ (Fourier 1807)

(Dobjuk el!!) [Euler, D'Alembert, Lagrange, Cauchy (**biz.**)]


2
1
–4
–3
–2
–1
1
2
3
4
–1
$\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{2}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$


2
1
–4
–3
–2
–1
1
2
3
4
–1
$\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{5}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$


2
1
–4
–3
–2
–1
1
2
3
4
–1
$\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{8}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$

Definíció (kell)

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \stackrel{?}{=} s$$

$s_n = a_1 + \cdots a_n \to s$, akkor az összeg s, egyébként divergens (nincs összege)

Ellenőrizzük:

0) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \cdots + \dfrac{1}{2^n} + \cdots = 1$

00)

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

$$s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0 \Rightarrow \text{NINCS összeg}$$

000) $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \cdots = \ln 2$ (átrendezett már egy másik **sor**) (Abszolút konvergencia!!!)

0000) Fourier sora is OK, hiszen lehet olyan, hogy folytonos függvényekből álló végtelen sor összege nem folytonos. (**Biz.**: XIX. sz. második felében) (Dirichlet, Abel)

A végtelen összegek ”haszna”

α) $0,\dot{1}\dot{3} = \cdots$ (mértani sor: $a = \dfrac{13}{100}; q = \dfrac{1}{100}$)

β) $\sqrt{2} = 1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^2 \cdot 2!} + \dfrac{1 \cdot 3}{2^3 \cdot 3!} - \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 \cdot 4!} \cdots$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}x^k + \cdots + x^n.$$

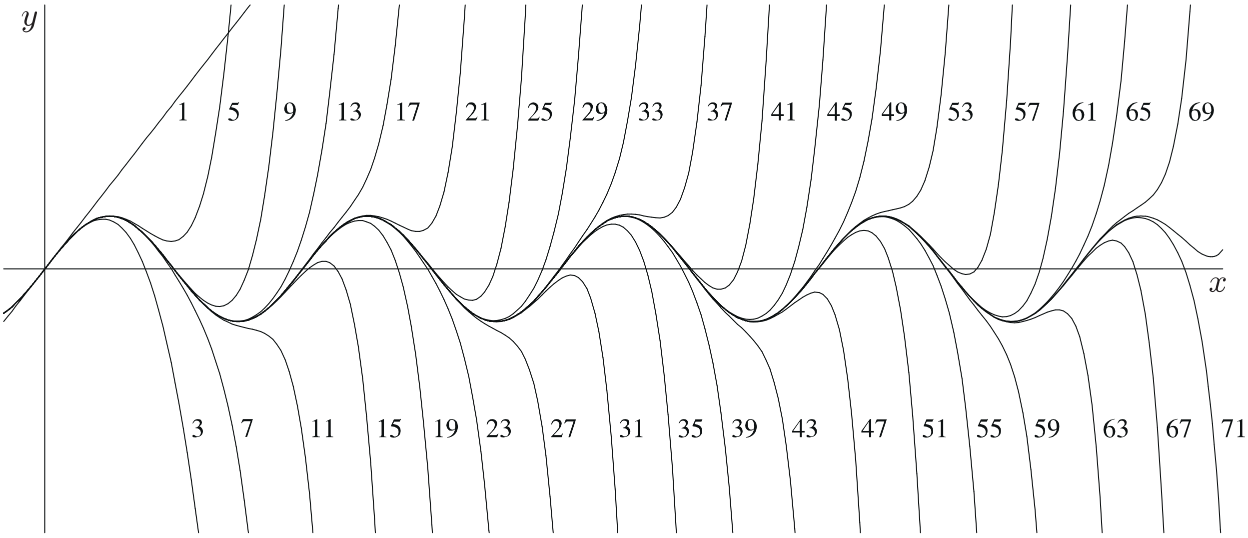
$$n \to \frac{1}{2} \text{ (NEWTON)}$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}x^2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}x^k + \cdots$$

$$x = 1$$

$$\gamma) \;\; \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$



$\delta)\ \ \pi = 4\left(1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots\right)$

$\pi \approx 3,14\ldots$

i.e.	$2000\ (B)$	$3,\mathbf{1}25$
	(E)	$3,\mathbf{1}6$
	$250\ (A)$	$3,\mathbf{141}8$
i.sz.	263 :	5 tizedesjegy
	480 :	7
	1429 :	14
	1610 :	35
	1719 :	112
	1847 :	152
	1874 :	527
	1973 :	1 001 250
	2002 :	1 240 000 000 000
	2010 :	5 000 000 000 000
	2012 :	1 241 100 000 000 000 000

François Viète (kb. 1579):

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots.$$

John Wallis (kb. 1650):

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdots}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdots}.$$

William Brouncker (kb. 1650):

$$\pi=\cfrac{4}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cdots}}}}.$$

Madhava, James Gregory, Gottfried Wilhelm Leibniz (1450–1671):

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots.$$

(lassú, de szép; Newton; biz. a könyvben)

Isaac Newton (kb. 1666):

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24\Big(\frac{2}{3\cdot 2^3} - \frac{1}{5\cdot 2^5} - \frac{1}{28\cdot 2^7} - \frac{1}{72\cdot 2^9} - \cdots\Big).$$

Srinivasa Ramanujan (1914):

$$\frac{1}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^3 \frac{42\,n+5}{2^{12\,n+4}}\,.$$

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4} \frac{[1103 + 26390\,n]}{396^{4n}}\,.$$

David Chudnovsky és Gregory Chudnovsky (1989):

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(6n)!}{(n!)^3 (3n)!} \frac{13591409 + n\,545140134}{(640320^3)^{n+1/2}}\,.$$

(Minden újabb tag hozzávétele kb. 15 újabb pontos jegyét adja π-nek.)

Jonathan Borwein és Peter Borwein (1989):

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (6n)!}{(n!)^3 (3n)!} \frac{(A + nB)}{C^{n+1/2}}\,,$$

ahol

$$
\begin{aligned}
A &:= 212175710912\sqrt{61} + 1657145277365 \\
B &:= 13773980892672\sqrt{61} + 107578229802750 \\
C &:= [5280(236674 + 30303\sqrt{61})]^3.
\end{aligned}
$$

(Minden újabb tag hozzávétele kb. 31 újabb pontos jegyét adja π-nek.)

David Bailey, Peter Borwein és Simon Plouffe (1996):

$$
\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i} \Big(\frac{4}{8\,i+1} - \frac{2}{8\,i+4} - \frac{1}{8\,i+5} - \frac{1}{8\,i+6} \Big).
$$

Megjegyzés: irracionalitás; transzcendencia; 1761 Lambert; 1882 Lindemann

Egy porszem virágot terem,
S egy szál vadvirág az eget,
Fogd föl tenyeredbe a végtelent,
S egy perc alatt élj évezredet.

(W. Blake)