# Még egyszer a π-ről

2026. 03. 14.

SZTE TTIK Bolyai Intézet Analízis tanszék

Dr Németh József
c. egyetemi tanár

A π a világ leghíresebb és legkutatottabb

a legtöbb számításban és hivatkozásban

szereplő száma.

A gízai nagy piramis kerületének a fele

elosztva a magasságával ≈ 3,14...

Nincs talán másik olyan szám, amely annyi érdekes jelzőt kapott volna, mint a $\pi$.

Ezek közül csak néhányat említek: BÁMULATOS, BÁMULATBA EJTŐ, TITOKZATOS, LENYŰGÖZŐ, REJTÉLYES, KIFÜRKÉSZHETETLEN.

KITŰZŐ) Visegrád.

Kör kerülete, területe, ellipszis területe;

szabályos sokszög területe; gömb felszíne,

gömb térfogata; henger felszíne, térfogata,

forgáskúp felszíne, térfogata; az integrálszá-

mítás zömében (pl. mérnöki számításokból)

szerepel a π, űrkutatási számításokból (ld.

később: ORCHIDEA

-3-

*összegek

*

Egymásra vannak utalva

Kedvenc témám: végtelen sorok*, de a $\pi$ is (kitűző) 35 jegy, 80 (Rajveer Meena; 2015; 21 év; 70.000; 9 óra 27') + Fogadás!

Kalmár prof. 35

A) **Egy kis bevezető** (még nem $\pi$ a neve)

i.e. 3000 (Egyiptom) $\pi \sim 3$ ($\pi$: arány, nem $\pi$) $k = d \cdot \pi \Rightarrow \frac{k}{d} = \pi$

i.e. 2000 (Babilonia) $\pi \sim 3,125$

i.e. 2000 (Egyiptom) $\pi \sim 3,16$ $\left[\underbrace{\left(d - \frac{d}{9}\right)^2}_{\text{terület}}\right]$; $d$ : átmérő

átmérő

Arkhimedesz: (i.e. 300)

1) a kör átmérője és a kerülete nem összemérhető $\frac{p}{q}$: (Lambert 1761) ; $\boxed{2000 \text{ év}}$ Hippaszosz i.e. 500 $\sqrt{2}$ (PITAGOREUS) (FÜGGELÉK)

2) a kör négyszögesítése (Lindemann 1882 - transzcendens) (i.e. 1800 Babilónia; $\sqrt{\pi}$ szerkeszthetősége; $\boxed{3600 \text{ év}}$ Algebrai (i.e. 1550 Ó.EGY. PAPIRUS tekercs; Rhind sz.) ≈ 1800) 64, 63,61 (lengyel mat)

3. Beírt és köré írt sokszögekkel:

6 ⟶ 12 ⟶ 24 ⟶ 48 ⟶ 96 oldalú szab. sokszög)

(kerület; Arkhimedesz – Eudoxus féle egzisztencia és unicitás-tételek) (i.e. 360) ($s_n$; $S_n$)!

KALMÁR INTEGRÁL

ARKHIMEDESZ a végtelen sorokat is „elindította"

(Parabola szelet; $\triangle$; $T = A\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots\right)$ előzmény ZENON ?

Analízis -

4. Arkh.: $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$

Viete (XVI) $3 \cdot 2^{17}$ oldalú 17. sokszög, ettől 9 jegy

Ludolf von Ceulen (XVII) Ludolf-féle szám, W. Jones, Euler $\pi$ (periódikus)

$15 \cdot 2^{35} \to 20$ jegy, $2^{62} \to 35$ jegy, $\boxed{\text{SÍRKŐ (emlékmű)}}$

Közelítési eszköz: Végtelen összegek, sorok

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$; $s_n = a_1 + \dots + a_n$; $s_n \to 1$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$.

(minél több jegy kell $\pi$-ből, annál több tagot kell venni a sorból – FUTTA (ld. alább))

1. Madhava – Gregory – Leibniz (XVII)
(India XIV–XV)

$C = \frac{4d}{1} - \frac{4d}{3} + \frac{4d}{5} - \dots$ ahol $d$: átmérő, $C$: a kerület

$\Rightarrow \pi = \boxed{4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots\right)}$, lassú; $\boxed{\text{ELSŐ SZÁMÍTÓT. } \infty \text{ sor } \pi}$

(6 jegyhez $-2 \cdot 10^6$ tag, 9 jegyhez $2 \cdot 10^9$ tag)

Módszer (G–L): (Riemann)

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \text{ (Euklidesz, Arkhimedesz)}$$

(mértani sor $q = -x$)!! (POLINOM – OSZTÁS)

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots, \boxed{|x| < 1.}$$

$$\operatorname{arctg} x \overset{N-L}{=} \int \frac{1}{1+x^2}\,dx \overset{!}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \dots \Bigg\} \boxed{\text{Riemann}} \Rightarrow$$

(DIFF.) (N-L)

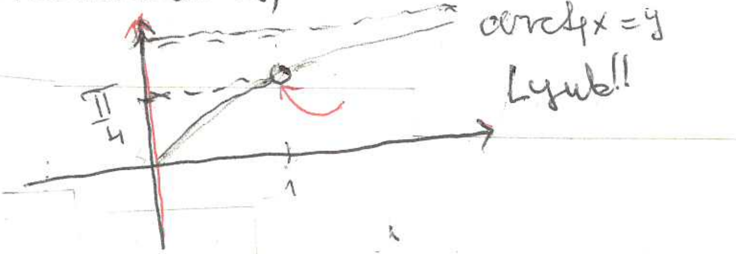
$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \dots.$$

$\boxed{\text{ZSENI}}$ %

$x = 1$ $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ (v.ö.: $|x| < 1$) HATV. SOR $(x^n)$ Def

**Megj.** Hatv.sor integrálása; Abel-tétel (XIX), $|x| < 1$, Leibniz, Weierstrass (XIX). Pl.: $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \stackrel{?}{=} 12$? (ÁTRENDEZÉS) (SÖRIVÁS, TANÍTÁS)

Abszolút konvergencia (↔ Riemann-tétel)




2. Newton (XVII) (EUKLIDÉSZ és ARKHIMEDESZ) (vállain

Módszer: $\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}}$ $\binom{n}{k}$ kombinatorikai jel

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \Rightarrow (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

binomiális sor

(golyók; Abel) (Anatómia...) $\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} = \binom{\alpha}{k}$ $\updownarrow$ ?

$\alpha = -\frac{1}{2}$; $x \sim -x^2$ (Zseni!! ⟹ 200 év Abel!)

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{3x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \dots$$

HF

$$\Rightarrow \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi = 6\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 2^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 2^5} + \dots\right).$$ Gyorsítás (keverett tagok)

ld. Mellékletben még néhány sorfejtés

~~C) **Szép sorok a $\pi$-vel($\pi$-t tartalmazó sorok)** Szép nő.~~ (*)

~~1. $\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdots\right)$; Sorrend! Nem abszolút kon-~~

(*) SZŐKENŐS VICCEK (USA)

5/1

| | | | |
|---|---|---|---|
| i.e. | 2000 $(B)$ | $3,125$ $\left(3\frac{1}{8}\right)$ | |
| | $(E)$ | $3,16$ $\left[4\left(\frac{8}{9}\right)^2\right]$ | |
| | 250 $(A)$ | $3,1418$ | |
| i.sz. | 263 : | 5 tizedesjegy | |
| | 480 : | 7 | |
| | 1429 : | 14 | |
| | 1610 : | 35 | (Ludolf van Ceulen) |
| | 1719 : | 112 | |
| | 1847 : | 152 | |
| | 1874 : | 527 | |
| | 1973 : | 1 001 250 | |
| | 2010 : | 5 000 000 000 000 | |
| | 2020 : | $50 \cdot 10^{12}$ | |
| | 2021 : | $62,8 \cdot 10^{12}$ | (Svájc; 108 nap, 8 óra) |
| | 2024 : | $105 \cdot 10^{18}$ | (Rajveer Meena); hitelesítés ? |
| | 2025 | $300 \cdot 10^{12}$ | (Chudhovski) |

MIÉRT KELL SOK JEGY? (MARS SZONDA)

1970 körül MARS-szonda 102.000 km-rel elkerülte volna a bolygó; ha $\pi = 3,14$-et vettek volna 31 jegy helyett. Ez a Hold–Föld távolság harmada. NASA: 15 jegy (Jacobi)

A továbbiakban bizonyítás nélkül sorolunk fel néhány érdekes előállítást (a szerzővel és évszámmal együtt).

François Viète (kb. 1579):

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots$$

5/2



John Wallis (kb. 1650):

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdots}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdots}.$$

William Brouncker (kb. 1650):

$$\pi=\cfrac{4}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cdots}}}}.$$

Madhava, James Gregory, Gottfried Wilhelm Leibniz (1450–1671):

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots.$$

John Macnin (1700):

$$\pi=16\,\mathrm{arctg}\frac{1}{5}-4\cdot\mathrm{arctg}\frac{1}{239}\Rightarrow$$

$$\pi=16\left(0,2-\frac{0,2^3}{3}+\frac{0,2^5}{5}-\cdots\right)-$$

$$-4\left(\frac{1}{239}-\frac{1}{3\cdot 239^3}+\frac{1}{5\cdot 239^5}-\text{kicsi}\right)$$

Isaac Newton (kb. 1666):

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24\Big(\frac{2}{3\cdot 2^3} - \frac{1}{5\cdot 2^5} - \frac{1}{28\cdot 2^7} - \frac{1}{72\cdot 2^9} - \cdots\Big).$$

$$\pi = 6\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 2^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 2^5} + \cdots\right)$$

Srinivasa Ramanujan (1914):

$$\frac{1}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^3 \frac{42\,n+5}{2^{12\,n+4}}\,.$$

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4}\frac{[1103+26390\,n]}{396^{4n}}\,.$$

* David Chudnovsky és Gregory Chudnovsky (1989):

$$\frac{1}{\pi} = 12\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(6n)!}{(n!)^3(3n)!}\frac{13591409+n\,545140134}{(640320^3)^{n+1/2}}\,.$$

(Minden újabb tag hozzávétele kb. 15 újabb pontos jegyét adja $\pi$-nek.) . Ld. 2025*

Jonathan Borwein és Peter Borwein (1989):

$$\frac{1}{\pi} = 12\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(6n)!}{(n!)^3(3n)!}\frac{(A+nB)}{C^{n+1/2}}\,,$$

ahol

$$A := 212175710912\sqrt{61} + 1657145277365$$
$$B := 13773980892672\sqrt{61} + 107578229802750$$
$$C := [5280(236674 + 30303\sqrt{61})]^3.$$

(Minden újabb tag hozzávétele kb. 31 újabb pontos jegyét adja $\pi$-nek.)

David Bailey, Peter Borwein és Simon Plouffe (1996):

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i}\left(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6}\right).$$

van még ennél is "gyorsabb"

Az n-edik ~~ku~~ jegyet a többi nélkül

-6- C) Szép sorok a π-vel (Csúnya sor mivos) (Szép nő) Szörnyű viccek

1) $\pi = 4\cdot\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right)$ (első stílus)

wow | A csúcs |

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (Euler; 1736; 100 év, **memória**); az első 20 jegyből (torta, faliszőnyeg, villamos, mentő)
**Memória** Vergilius; $n^6$: $10 \le n \le 100$; Pietro Magnoli (1636)

(XVIII)

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}+\dots = 1{,}6449340668482264364 7\dots$$

1. **Megj.** Számelmélet; a val.sz. (relatív prímek) $\frac{6}{\pi^2}$ (K.L. – N.J. – Cs.S.) (TANÁROKNAK; KÖNYV) Elemi mat. ELTE

2. Megjegyzés a) $n^2$ és $(n+1)^2$ között $10^{10}$ b) Landau sejtése (LEGENDRE) (KÖNYV) $[n^3; (n+1)^3]$ d) $n^2+1$ alakú prím ∞ ???

(módszer $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$-en alapul) 6/1 + 6/2

---

3. $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\dots = \ln 2+\frac{\pi}{4}$ HA

4. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\dots = \ln\sqrt[3]{2}+\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ HATV

bélosi probléma (egy a négyből)

Megjegyzés k poz; l negatív. Konv ⟺ k = l

CRATZ [2019] 40

6/1

Segédlet a következő feladathoz.

Legyen $p_n$ az $n$-edik prím.

Bebizonyítható, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = \infty$$

o) Egy csodálatosan szép példa.
Mutassuk meg, hogy van két olyan szomszédos négyzetszám, amelyek közé legalább $10^6$ db prímszám esik.

**Megoldás.** Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, azaz minden $n$ természetes szám esetén $n^2$ és $(n+1)^2$ közé kevesebb, mint $10^6$ db prímszám esik.

Jelölje $p_1^{(n)}, \ldots, p_{s_n}^{(n)}$ ezeket a prímszámokat. Ekkor tehát $s_n < 10^6$ teljesül minden $n$ esetén. Nyilvánvaló, hogy ekkor

$$\frac{10^6}{n^2} > \frac{1}{p_1^{(n)}} + \frac{1}{p_2^{(n)}} + \cdots + \frac{1}{p_{s_n}^{(n)}}.$$

Viszont, ha mindkét oldalt összegezzük, adódik, hogy

$$10^6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n},$$

ahol a jobb oldali összegben az összes prímszám reciprok összege van. Ez nyilvánvaló, hogy ellentmondás, mert a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens, a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ sor pedig divergens,

6/12

# Figyeld a $\pi$-t

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{2^0}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{1}{1}\pi^2$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots=\frac{2^2}{5!}\frac{1}{3}\pi^4$$

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\cdots=\frac{2^4}{7!}\frac{1}{3}\pi^6$$

$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\cdots=\frac{2^6}{9!}\frac{3}{5}\pi^8$$

$$1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\cdots=\frac{2^8}{11!}\frac{5}{3}\pi^{10}$$

$$1+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\cdots=\frac{2^{10}}{13!}\frac{691}{105}\pi^{12}$$

$$1+\frac{1}{2^{14}}+\frac{1}{3^{14}}+\cdots=\frac{2^{12}}{15!}\frac{35}{1}\pi^{14}$$

$$1+\frac{1}{2^{16}}+\cdots=\frac{2^{14}}{17!}\frac{3617}{15}\pi^{16}$$

$$1+\frac{1}{2^{18}}+\cdots=\frac{2^{16}}{19!}\frac{43867}{21}\pi^{18}$$

$$1+\frac{1}{2^{20}}+\cdots=\frac{2^{18}}{21!}\frac{1222277}{55}\pi^{20}$$

$$1+\frac{1}{2^{22}}+\cdots=\frac{2^{20}}{23!}\frac{854513}{3}\pi^{22}$$

$$1+\frac{1}{2^{24}}+\cdots=\frac{2^{22}}{25!}\frac{1181820455}{273}\pi^{24}$$

$$1+\frac{1}{2^{26}}+\cdots=\frac{2^{24}}{27!}\frac{76977927}{1}\pi^{26}$$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ (?) (Apery≈1970) HF FIELDS-érem (<40 év
(NOBEL ~ Fields-díj, Abel-d
2010

5. Fibonacci: $a_0 = a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 5$, $a_5 = 8 \ldots$

$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, $n \geq 1$.

A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = ? \;\;\ldots = 3{,}359855\ldots$ Chincs $\pi$ ??)

$\boxed{\sum_{1}^{\infty} \mathrm{arctg}\,\frac{2}{n^2} = \frac{3}{4}\pi}$

B) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{arctg}\,\frac{1}{a_{2n}} = ?$

A Fibonacci-sorozat definíciójából adódik a következő: (Segédlet!!)

(1) $\qquad a_{n+1} \cdot a_{n+2} - a_n\, a_{n+3} = (-1)^{n+1}$. HF

Az arctg definíciójából és a tg addíciós azonosságából pedig adódik:

(2) $\qquad \mathrm{arctg}\, x - \mathrm{arctg}\, y = \mathrm{arctg}\,\frac{x-y}{1+xy}$

Az (1) és (2)-ből adódik, hogy:

$$\underline{\mathrm{arctg}\,\frac{1}{a_{2n+1}} - \mathrm{arctg}\,\frac{1}{a_{2n+2}}} = \mathrm{arctg}\,\frac{a_{2n+2} - a_{2n+1}}{1 + a_{2n+1} \cdot a_{2n+2}}$$

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} = \mathrm{arctg}\,\frac{a_{2n}}{a_{2n}\, a_{2n+3}} = \underline{\mathrm{arctg}\,\frac{1}{a_{2n+3}}}$$

Összegezve ezeket, kapjuk, hogy

$$\mathrm{arctg}\,\frac{1}{a_1} = \sum_{k=1}^{n+1} \mathrm{arctg}\,\frac{1}{a_{2k}} + \mathrm{arctg}\,\frac{1}{a_{2n+3}},$$

ahonnan határátmenettel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{arctg}\,\frac{1}{a_{2n}} = \boxed{\frac{\pi}{4}}.$$ JtaJ

Ad A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \overset{\text{konv}}{=} 3{,}359885\ldots$ (Erdős: Irracionális ???)

P. André-Jeannin (1989) IGEN. (Zárt alakban nincs)

Hol lehet a $\pi$?

$\frac{F_{n+1}}{F_n} \approx 1{,}618$ (Aranyból) Geometriai sor

C) A π segít az e"-nél (π: az úttörő)

(*) $\lim_{n\to\infty} (n \cdot \sin 2\pi n! \cdot e) = 2\pi$

(Ha $e = \frac{p}{q}$, akkor $\lim(\quad) = 0$ lenne. Ivö $2\pi$)

Bizonyítás: ld. a köv. oldalon.

A) Definíció

$e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$; $e \approx 2{,}71$. TRANSZCENDENS Hermite 1873 (1) L: a 0., π a 2.

B) Segédtétel

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}+\dots = e$ AF; Kürg Jeoppetes

Még az e-ről és π-ről?

e - π, rac? irrac? transzcendens? (hihetetlen)

$$a_n = n\sin(2\pi e n!) = n\sin\left[2\pi n!\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\right] =$$

$$n\sin\left[2\pi n!\left(1+1+\frac{1}{2!}+\dots\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+\dots\right)\right] =$$

$$= n\sin\left[2\pi\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\dots\right)\right] \geq$$

$$\geq n\sin\frac{2\pi}{n+1} \to 2\pi \qquad \left(\lim_{0}\frac{\sin h}{h}=1\right)$$

Másrészt

$$a_n \leq n2\pi\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\dots\right) \leq$$

$$\leq n2\pi\left(\underbrace{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\dots}_{*}\right) = n2\pi\frac{1}{n} = 2\pi$$

Így a rendőrelv (szendvics) szerint $a_n \to 2\pi$.

* geometriai sor: $a=\frac{1}{n+1}$, $q=\frac{1}{n+1}$

3 poz; 3 neg  Sejtés?!

Tanárjelöltek! (utána(m) néz)
Pólya Gy.: tanár a felsőbb matek-ban
(tanártov. képzés)

konvergens (

E)(Ságvári – bocsánat!!!) A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ sor problémája. (TANÁR 3 alak)

**Segédtétel.** (Dirichlet-féle kritérium) *Ha $a_n \downarrow 0$ és $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ sorozat korlátos, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergens.*

*Bizonyítás.* (Cauchy-kritériummal)

$$\left|\sum_{m}^{n} a_k b_k\right| = \left|\sum_{m}^{n} a_k (B_k - B_{k-1})\right| =$$

$$= \left|\sum_{m}^{n} a_k B_k - \sum_{m-1}^{n-1} a_{k+1} B_k\right| =$$

$$= \left|\sum_{m}^{n-1} B_k (a_k - a_{k+1}) - a_m B_{m-1} + a_n B_n\right| \leq$$

$$\leq K(a_m - a_n) + K\,a_m + K\,a_n \to 0,$$

azaz konvergens a sor.

azaz a sor konverge

A példában szereplő sor konvergenciájának bizonyításához most azt fogjuk belátni, hogy az

$$s_n = \sin 1 + \sin 2 + \cdots + \sin n$$

sorozat korlátos.

Ez a következő trigonometrikus azonosságból adódik:

$$(*) \quad \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{2n+1}{2}x}{2 \sin \frac{x}{2}},$$

KONT. DIRICHLET MAG

$$(x \neq 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}).$$

Ezt könnyű belátni például teljes indukcióval, vagy a jobb oldalon levő nevezővel végig szorozva és alkalmazva a

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

összefüggést, a bal oldalon egy teleszkópikus összeget kapunk, amelyben a megmaradó tagok éppen (34) jobb oldalán a számlálóban levő két taggal egyenlőek.

Tehát $(*)$ alkalmazásával az adódik, hogy

$$|s_n| = |\sin 1 + \sin 2 + \cdots + \sin n| =$$
$$= \left| \frac{\cos \frac{1}{2} - \cos \frac{2n+1}{2}}{2 \sin 1/2} \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{1}{2}} = K,$$

azaz $\{s_n\}$ valóban korlátos sorozat.

Ezek után alkalmazzuk a Dirichlet-kritériumot a

sorunkra: $$\sum^{\infty} \frac{\sin n}{n} = \sum^{\infty} \sin n \cdot \frac{1}{n}$$ az $b_n = \sin n$, $a_n = \frac{1}{n}$ szereposztással

E₁) **Hol a $\pi$?** **Mennyi a sor összege?** (Egyetem **III.** év)
(Sz-Nagy; Demidovics; N.J.: Sorok)

Tekintsük: $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$; $0 < x < 2\pi$ függvényt
(2π-periodikus)

Ennek a Fourier*-sora: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ (Sz-Nagy külön fejezet) (FÜGGELÉK)

És mivel $f \in D_{x=1}$ így a sor előállítja a fgv-t az $x=1$ helyen, azaz

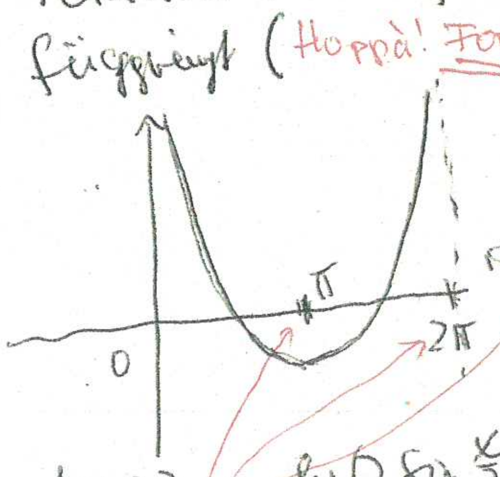
$\boxed{(f \in C_x \text{ nem elég Fejér})}$ $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}\Big|_{x=1} = \frac{\pi - 1}{2}$$ PÁLINKA

F) (Kézenfekvő) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$ problémája.

α) Konv triviális (Rédei!!)
$|\cos 1 + \cos 2 + \dots \cos n| < \frac{1}{\sin 1/2}$ itt is teljesül.

β) **Az összeg nehezebb** (Gyemidovics!!!)

Tekintsük az $f(x) = -\ln(2\sin\frac{x}{2})$; $0 < x < 2\pi$
függvényt (Hoppá! FORDÍTVA) 2π per. folytatva




Ennek a sora a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ és akkor
f(x) diff.; ott előállítja a fgv

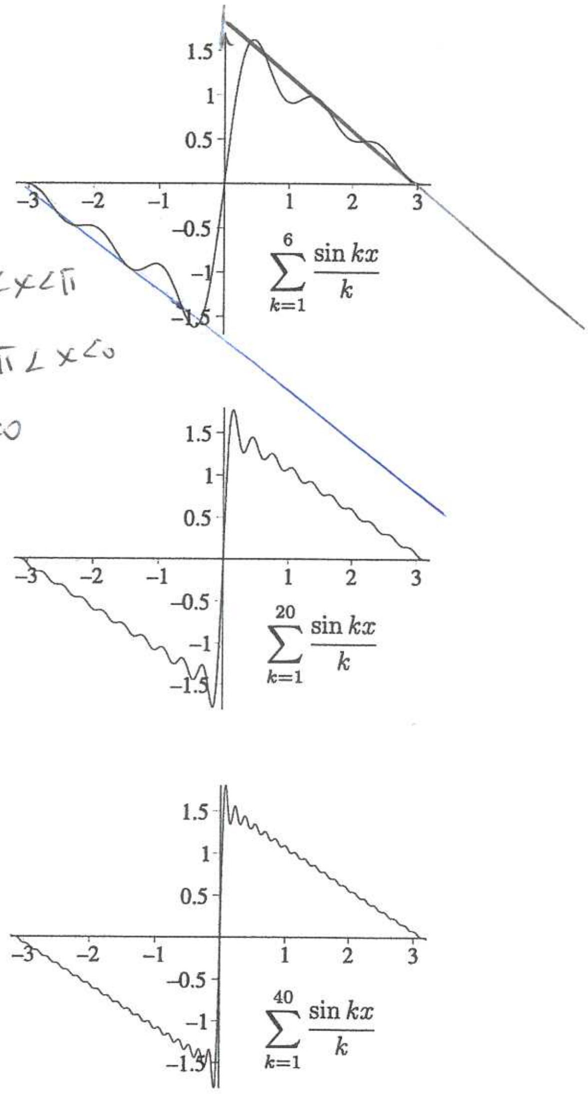
Azaz $-\ln(2\sin\frac{x}{2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$; Így $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}\Big|_{x=1} = -\ln(2\sin\frac{1}{2})$

$= 0{,}04335$

$\boxed{\text{HOL ITT A } \pi}$ ??

XII/1.






$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi - x}{2}, & \text{ha } 0 < x < \pi \\ -\frac{\pi + x}{2}, & \text{ha } -\pi < x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Fourier-sor:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

**11. ábra**

FOURIER - CAUCHY !!

(Weierstrass)

(egyenl. konv.)

6. Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg} n}{n}$ sor?? $\frac{n_k}{k}\Big| \leq \frac{\sqrt{3}}{n_k} \to 0$, ha $k \to \infty$.

**Segédtétel.** Legyen $\alpha$ irracionális szám. Ekkor létezik végtelen sok $p, q$ egész szám úgy, hogy

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$$

(Ez a skatulyaelv segítségével könnyen adódik.)
Most térjünk rá az eredeti állítás bizonyítására:
Legyen $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $q$-t pedig vegyük 1-nél nagyobb páratlan számnak úgy, hogy fennáljon, hogy

!!!

$\boxed{\text{ITT A } \pi}$

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{\pi}{2}\right| < \frac{1}{q^2}, \quad \text{azaz} \quad \left|p - q \cdot \frac{\pi}{2}\right| < \frac{1}{q} < \frac{\pi}{4}.$$

Mivel $q$ páratlan, a ctg függvény differenciálható a

$$\left[q\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4};\quad q\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right] \quad \text{intervallumon.}$$

Így a Lagrange-féle középérték-tétel szerint

$\exists\ z$ a $p$ és $q\dfrac{\pi}{2}$ között úgy, hogy

$$(*)\qquad |\operatorname{ctg} p| = \left|\operatorname{ctg} p - \operatorname{ctg} q\frac{\pi}{2}\right| = \left|p - q\frac{\pi}{2}\right|\frac{1}{\sin^2 z}.$$

Mivel $\dfrac{1}{sin^2 z} \leq 2$, így $(*)$-ból kapjuk, hogy

$$|\operatorname{ctg} p| \leq 2\left|p - q\frac{\pi}{2}\right| \Rightarrow |\operatorname{tg} p| \geq \frac{1}{2\left|p - q\frac{\pi}{2}\right|} \geq \frac{q}{2} \geq \frac{p}{4}$$

végtelen sok $p$-re

$$\left|\frac{\operatorname{tg} p}{p}\right| \geq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\operatorname{tg} n}{n} \not\to 0.$$

*Megjegyzés:* $\dfrac{\operatorname{tg} n}{n^2}, \ldots, \dfrac{\operatorname{tg} n}{n^7}?, \dfrac{\operatorname{tg} n}{n^8} \to 0$

Segédtétel: *Ha $\alpha$ irracionális szám, akkor* $\exists \dfrac{p_n}{q_n}$ $(p_n, q_n \in$ ld. előbb $\mathbb{Z})$, *hogy*

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}.$$

**Bizonyítás.** Legyen $n$ fix, $n \in \mathbb{N}$ és tekintsük a következő $(n+1)$ darab valós számot.

$$(*) \qquad 0,\ \alpha - [\alpha],\ 2\alpha - [2\alpha],\ \ldots,\ n\alpha - [n\alpha];$$

ezek mind beleesnek a $[0,1)$ intervallumba. Mivel a

$$(**) \qquad \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right), \ j = 0, 1, \ldots, n-1$$

lefedi a $[0,1)$-et, ezért kell lenni legalább két olyan pontnak (skatulyaelv) a $(*)$ pontok közül, mondjuk

$$n_1\alpha - [n_1\alpha] \text{ és } n_2\alpha - [n_2\alpha] \ (0 \le n_1 < n_2 \le n),$$

amelyek egy intervallumba esnek a $(**)$ intervallumok közül (u.i. $(*)$ $(n+1)$ pontot tartalmaz, $(**)$ pedig $n$ db intervallumot).
Így

$$|n_2\alpha - [n_2\alpha] - (n_1\alpha - [n_1\alpha])| < \frac{1}{n},$$

azaz

$$|\underbrace{(n_2 - n_1)}_{q_n}\alpha - \underbrace{([n_2\alpha] - [n_1\alpha])}_{p_n}| < \frac{1}{n},$$

azaz

$$|\alpha \cdot q_n - p_n| < \frac{1}{n} < \frac{1}{q_n} \Rightarrow \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}.$$

(Ha $n^*$ olyan, hogy az előbb kapott $|q_n \cdot \alpha - p_n| > \frac{1}{n^*}$, akkor újabb $\frac{p_n^*}{q_n^*}$ adódik úgy, hogy $|\alpha q_n^* - p_n^*| < \frac{1}{n^*}$, így újabb $\frac{p_n}{q_n}$-t kapunk, azaz végtelen sok ilyen tört adódik.

**20.** A $(\cos n)^n$ sorozat vizsgálata

**Áll.:** a sorozat divergens.

1. Megmutatjuk, hogy van olyan részsorozata, amely 0-hez tart.
2. Belátjuk, hogy $\exists\{p_n\}$, hogy $|\cos p_n|^{p_n} \geq \frac{1}{2}$, ha $n$ elég nagy.

Ad 1. Legyen $n_k = \left[\frac{\pi}{2} + k\pi\right] \Rightarrow \left|n_k - \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\right| < 1 < \frac{\pi}{3}$, így $|\cos n_k| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |\cos n_k|^{n_k} \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n_k} \to 0.$

# 1. Függelék (Pl. N.7: Előadások a végtelen sorokról. c)

## I. HATVÁNYSOR (hatvány függvényekből áll)

Ha $f \in D_0^\infty$, akkor $\exists R \geq 0$, hogy

Ber. analízis Calculus

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

$f(x)$ sor az $f$ $x=0$ körüli hatványsora (Taylor-sora) és az előállítás egy $(-R; R)$ intervallumon érvényes ahol $0 \leq R \leq \infty$

Pl. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$ $\quad \operatorname{arctg} x = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

---

## II. Fourier-sor (ld*)

Legyen $f(x) \in R_{[0;2\pi]}$ $2\pi$ periodikus függvény.

Akkor az $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ sort az

$f$ függvény Fourier-sorának nevezzük,

ahol $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx$.

Jelölés: $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$.

Alk: hővezetési alkalmazások; képfeldolgozás, ...

Ha $f \in D_{x_0}$, akkor „$\sim$" jel helyett „$=$" jel van. (ld. Fejér Lipót percdíját)

(18). **Állítás:** A $\pi$ irracionális szám. 2. FÜGGELÉK

**Bizonyítás** Tfh $\pi = \frac{a}{b}$, ahol $a, b \in \mathbb{N}^+$. (Indirekt)

Tekintsük a $g(x) = \dfrac{1}{n!}x^n(a - bx)^n$ fgv-t. Nyilván $g(x) = \dfrac{1}{n!}(A_0x^n + A_1x^{n+1} + \cdots + A_nx^{2n})$, ahol $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathbb{Z}$.

**1. Részállítás.**

$\alpha$) $g(0) = g'(0) = \cdots g^{(n-1)}(0) = 0$

$\beta$) $g^{(n)}(0),\ g^{(n+1)}(0), \ldots g^{(2n)}(0)$ egész számok.

*Tehát* $g(0), g'(0), \ldots, g^{(2n)}(0) \in \mathbb{Z}$.

**2. Részállítás.**

$\alpha$) $g(\pi) = g'(\pi) = \cdots = g^{(n-1)}(\pi) = 0$

$\beta$) $g^{(n)}(\pi), g^{(n+1)}(\pi), \ldots g^{(2n)}(\pi)$ egész számok

*Megjegyzés.* $t = a - bx$ helyettesítéssel $x = \pi = \dfrac{a}{b}$-re $t = 0$ lesz, így adódik az előző ponthoz hasonlóan.

19

7

$$t = a - bx \Rightarrow x = \frac{a-t}{b}$$

$$g(x) = \frac{1}{n!}x^n(a-bx)^n = \frac{1}{n!}t^n\left(\frac{a-t}{b}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{n!b^n}(a-t)^n \cdot t^n =$$

$$= \frac{1}{n!b^n}[A_0t^n + A_1t^{n+1} + \cdots + A_nt^{2n}] =$$

$$= \frac{1}{n!b^n}[A_0(a-bx)^n + A_1(a-bx)^{n+1} + \cdots +$$

$$+ A_n(a-bx)^{2n}]$$

($\pm\, b^n$ a belső függvény $n$ deriváltja)

*Tehát* $g(\pi), g'(\pi), \ldots, g^{(2n)}(\pi) \in \mathbb{Z}$.

Azaz összegezve:

(1) $g(0), g'(0), \ldots, g^{(2n)}(0) \in \mathbb{Z}$

(2) $g(\pi), g'(\pi), \ldots g^{(2n)}(\pi) \in \mathbb{Z}$

Tekintsük (parciális integrálással):

$$F(x) = \int \sin x g(x)dx = -\cos x g(x) +$$

$$\int \cos x g'(x)dx = -\cos x g(x) + \sin x g'(x) -$$

$$\int \sin x g''(x)dx = -\cos x g(x) + \sin x g'(x) +$$

$$\cos x g''(x) + \cdots \pm \cos x g^{(2n)}(x)$$

20

8

A N–L formulából

(3) $\int\limits_0^\pi \sin x g(x) dx = F(\pi) - F(0) =$ egész szám (ld. (1), (2)).

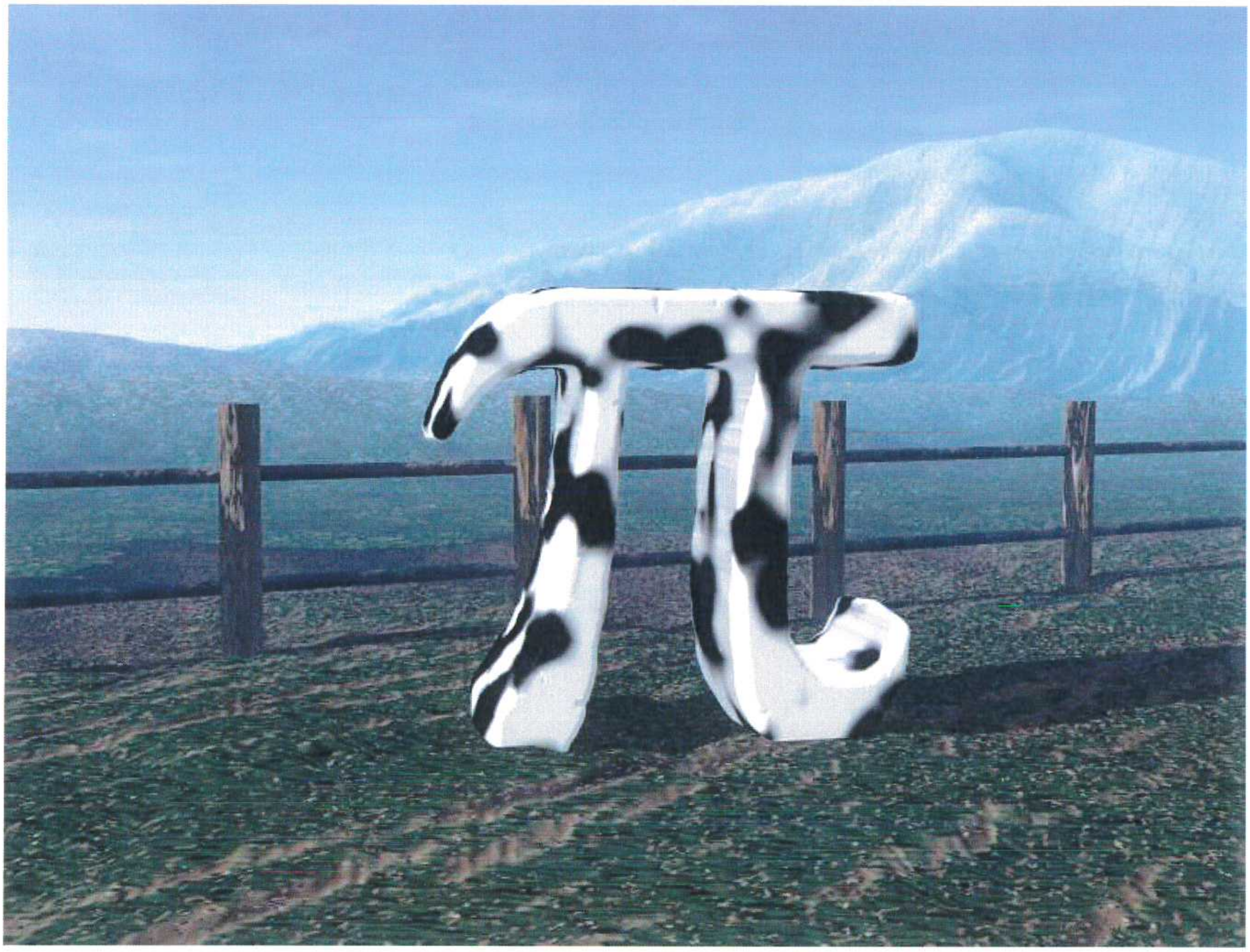
Világos: $\sin x g(x) > 0$, ha $x \in (0, \pi)$
$\Longrightarrow \int\limits_0^\pi \sin x g(x) dx > 0$ és (3) alapján egész szám
Becsüljük:

$$\sin x \leq 1, \;\; a - bx \leq a, \;\; x \leq \frac{a}{b} = \pi. \qquad \text{(Rajz)}$$

Így $\int\limits_0^\pi \sin x g(x) dx \leq \pi \dfrac{a^n \pi^n}{n!}$, azaz

$$1 \leq \pi \frac{a^n \pi^n}{n!} = \pi \frac{(a\pi)^n}{n!} \to 0, \text{ ha } n \to \infty,$$

ami ellentmondás.



Egy porszem virágot terem,
S egy szál vadvirág az eget,
Fogd föl tenyeredbe a végtelent,
S egy perc alatt élj évezredet.

(W. Blake)


$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$


$\frac{\pi^2}{6}$