”Látom, de nem hiszem” (Ellentmondások és meghökkentő dolgok a végtelenről)

Lemma-tábor
SZEGED
2024. 07. 18.

Dr. Németh József c. egyetemi tanár
SZTE TTIK Bolyai Intézet
Analízis Tanszék

Pólya György: ”Ha a tudomány valamelyik területét (vagy elméletét, vagy fogalmát) tanítjuk, akkor az emberpalántáknak nagy lépésekkel nyomon kell követniük az emberiség szellemi fejlődését.”

A végtelen a matematikában: (2500 év; a végtelen tudománya; a matematika csodakorsója)

Ellentmondásos; vitatott, misztikus

”Sok képtelenség adódik a végtelen tagadásából is és elismeréséből is.” (Arisztotelesz, i.e. 384–322.) ($\sqrt{2}$ nem szakaszos)

”Mindig nagy falatnak tűnt”

”Megosztotta a matematikusokat” (Bolzano, 1781–1848) (Kell-e? Dobjuk el!)

”A végtelent legjobb elkerülni” (Galilei, 1564-1642) (Paradoxon)

”Ősidők óta semmi sem kavarja fel annyira az emberi értelmet, mint a végtelen kérdése” (Hilbert 1900 PÁRIZS; 23, 1)

”A levegőben volt, ha nem is beszéltek róla.” Például: Arkhimedesz: $k\psi d$; Euklides a prímszámokról $(a; b; c)$; ikerprímek (komputer); Goldbach (1742).

Példák (ellentmondások, meghökkentő dolgok a végtelent tekintve)

a) Galilei-féle paradoxon:

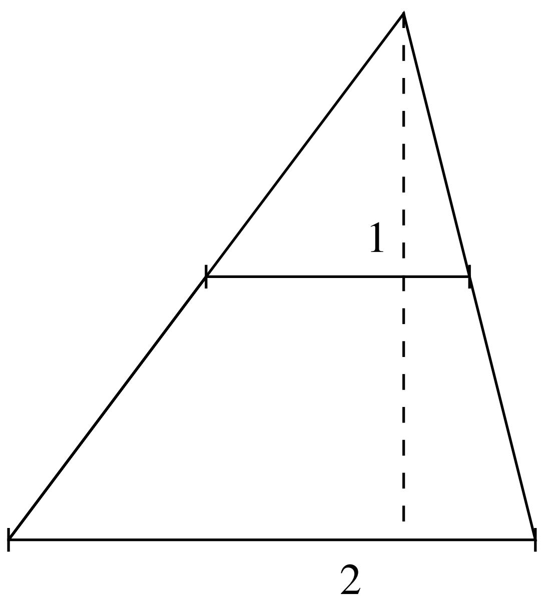
$$\begin{aligned} 1 &\leftrightarrow 2\\ 2 &\leftrightarrow 4\\ 3 &\leftrightarrow 6\\ &\vdots \end{aligned}$$

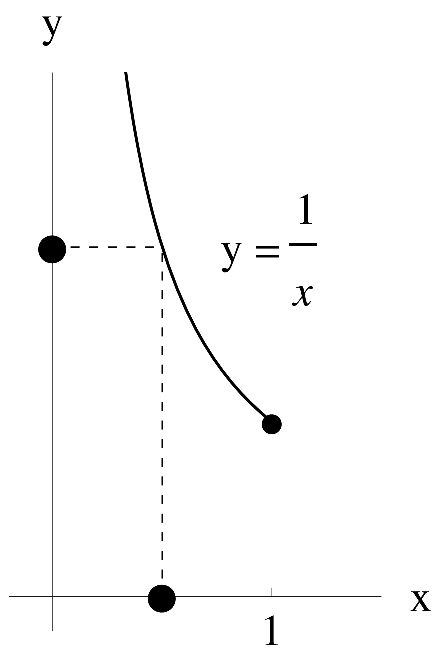
(*kölcsönösen egyértelmű*, akkor "ugyanannyi" elem, Kalmár-lovasok)

Paradoxon? Ellentmondás? Rész–egész régi felfogása? (Bolzano, 1781-1848; a rész $\neq$ egész).

AXIOMA: "Az egész nagyobb, mint a része." (Euklides)

b) vagy $[0;1]$ és $[0;2]$ példája ($x \to 2x$)





vagy $(-1;1) \longleftrightarrow (-\infty;\infty)$, $y = \dfrac{x}{1+|x|}$; azaz a $(-1,1)$ intervallumnak annyi pontja van, mint az egész számegyenesnek. De: $(-1;1) \leftrightarrow (0;2) \leftrightarrow (0,1)$.

Definíció: (ami "*feloldja az ellentmondást*", ami abból adódik, hogy a végesre igaz szabályokat akartuk a végtelenre "erőszakolni" (u.i.: a rész és egész problémáját)

Egy halmazt végtelen halmaznak nevezünk, ha van olyan valódi részhalmaza, amellyel a halmaz ekvivalens (azaz "ugyanannyi" pontja van) (kölcs. egyértelmű megfeleltetés).

(Ellenkező esetben *véges*.)

[Kihúztuk a "paradoxonok" méregfogát.] Ferdinand Ludwig Philipp Georg Cantor (1845-1918; német) nászút; Dedekind; elismertség; depresszió; intézet.... (cikkeit sokszor visszavonta) (nem értették meg) Járjuk be egy kicsit Cantor útját. (Bogrács!!!)

c) $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ (természetes számok) **Megszámlálhatóan végtelen** halmaz ($\Rightarrow$ egész számok is). **Számosság.**

d) $\left\{\frac{p}{q}\right\}$: racionális számok ($p, q \in \mathbb{Z}; q \neq 0$)

A racionális számok "ugyanannyian" vannak, mint a természetes számok (azaz **Megszámlálhatóan** végtelen sokan vannak) (HIHETETLEN – ŐRÜLET)

Ábra:

$$\begin{array}{cccc}
\frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \cdots \\[2ex]
\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \cdots \\[2ex]
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \cdots
\end{array}$$

(innen a **negatívak** is és utána **az összes**)

Megjegyzés: (másik bizonyítás) Számpárok $(n, m) \Leftrightarrow (2^n \cdot 3^m)$; ($n, m \in \mathbb{N}^+$, majd az összes) számhármasok, szám n-esek, polinomok (egész e.h.); $\sqrt{2}; \sqrt{3}; \ldots$. (algebrai irracionális) (PIROS CÉRNA).

e) Van-e olyan, aminek "több" pontja van, mint a *term. számok* (ill. racionális számok) (azaz *nem megszámlálható*) ("Végtelenek között nem lehet különbséget tenni." (Bolzano $\Leftrightarrow$ Dedekind) (XIX. század)

Igen: **Valós számok** (CANTOR) (4 **év**)

Módszere: (a $(0;1)$ intervallum összes (valós) pontjára) Indirekt: (tegyük fel, hogy megsz., azaz sorrendbe szedhető)

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, u_{11}u_{12}\ldots \\ x_2 &= 0, u_{21}u_{22}\ldots \\ &\vdots \\ x_n &= 0, u_{n1}u_{n2}\ldots u_{nn}\ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

(pl.: $0,5 = 0,499\ldots$-et vegyük)

Legyen $y = 0, v_1v_2v_3\ldots$, ahol legyen $v_n = 2$, ha $u_{nn} = 1$ és legyen $v_n = 1$, ahol $u_{nn} \neq 1$.

Ha pl. $y = x_n = 0, u_{n1}u_{n2}\ldots \underline{\underline{u_{nn}}}\ldots$

Elnevezés: *Kontinuum-számosságú* (valós számoké) Cantor féle diagonális eljárás. (halmaz elm., informatika). (Kerékjártó bizonyítása) (Gyöngyszem ld. fájl végén szkennelve.)

Problémák: Van-e a megszámlálható és a kontinuum között? (Kontinuum-hipotézis) (Hilbert 1. a 23-ból, ”Senki sem űzhet ki bennünket abból a paradicsomból, melyet Cantor teremtett nekünk.” (D.H.)) PÁRIZS – 1900.

Cantor: ”A matematika lényege annak szabadságában van; sokkal hasznosabb a matematikai kérdések felvetése, mint a problémák megoldása.”) (Vö.: ERDŐS; PINTÉR)

Gödel (1940): nem cáfolható; Cohen (1963): nem bizonyítható. (Axióma-rendszer!!)

Megjegyzés: N, Q, *Algebrai rac.,irracionális* (Def.), transzcendens; Lambert; 1760, (π irrac.) (v.ö. Archimedes.); Liouville (1844); Hermite (1873) (az e szám transz.); Lindemann (π transz.) (1882); Kronecker 1866-1903. ($\sin r; \cos r$, ha $r \neq 0, r \in Q$.) Köv.: A kör négyszögesítése; vö.: $\sqrt{2}$; $\sqrt{\pi}$; lengyel matematikus.(!!!)

Van-e a kontinuumnál nagyobb számosság? (Azaz van-e olyan halmaz, amelynek ”több” eleme van, mint a valós számok.) Pl: Cantor kérdése: A síknak az összes pontja ilyen-e? NEM.

g) A (0,1) szakasznak ugyanannyi pontja van, mint az egységnégyzetnek, ill. az egész síknak, sőt az egész háromdimenziós térnek, azaz kontinuum. Módszer: $P = (0, a_1, a_2, a_3, \ldots; 0, b_1, b_2, b_3 \ldots) \leftrightarrow 0, a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3$.

Cantor: ”Látom, de nem hiszem” Mit gondolt róla először? 3 évig ”bizonyította” az ellenkezőjét; 1871-1874)

Az egységnégyzet és az egész sík közötti megfeleltetés triviális.

Tehát a síknak nincs több pontja, mint kontinuum

(azaz valós számoké)

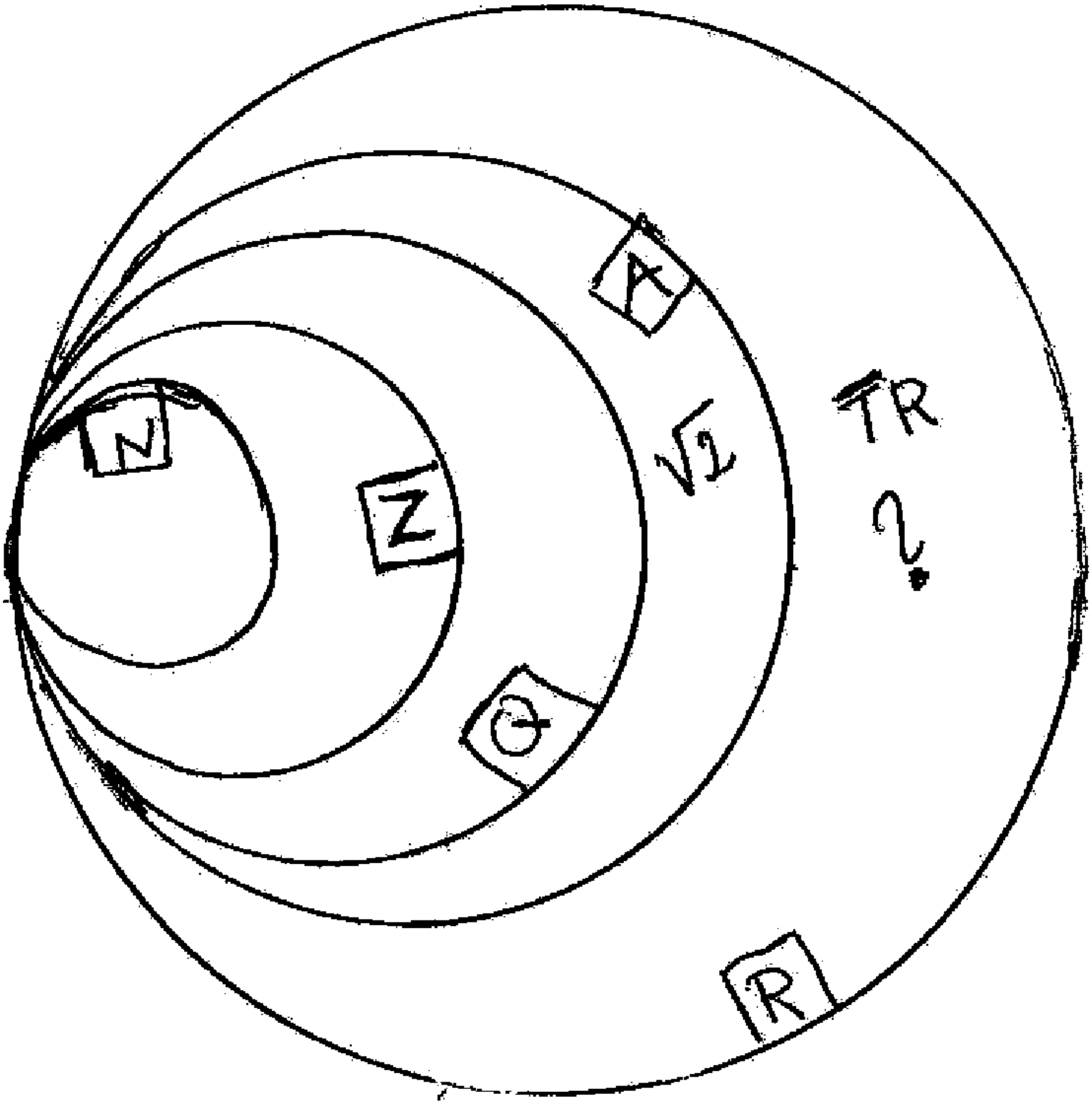
h) Van-e a kontinuumnál nagyobb számosságú halmaz

α) Polinomok (megszámlálható) (egész eh.)

β) Folytonos függvények (kontinuum) (HF; Sz.-Nagy Béla). (Egyetem.) (Vájt szeműek, ld. a fájl végén, szkennelve.)

γ) Az összes függvény; ÉT.: $\mathbb{R}$ (kar. függvény); a valós számok összes részhalmazának a halmaza nagyobb számosságú, mint a kontinuum. (Cantor tétele.) Egyetem. (Pl. k elemű halmaznak hány részhalmaza van.)

δ) A természetes számok összes részhalmazának a halmaza ????? számosságú (válasz a fájl végén; szkennelve).



Egy porszem virágot terem,
S egy szál vadvirág az eget,
Fogd föl tenyeredbe a végtelent,
S egy perc alatt élj évezredet.

(W. Blake)

I. Tétel: A valós számok halmaza nem megszámlálható

Bizonyítás:

A $0 \leq X < 1$ feétételnek eleget tevő valós számok halmaza meg nem számolható voltának fenti bizonyítását KERÉKJÁRTÓ BÉLA magyar matematikus nyomán a következő geometriai formába önthetjük.

Tegyük fel ismét, hogy a valós számok elrendezhetők valamely x_1, x_2, x_3,... sorozatba. Osszuk fel a (0,1) intervallumot 10 egyenlő részre; minden részintervallumhoz számítsuk hozzá bal végpontját, jobb végpontját ne. Válasszunk a részintervallumok közül olyat, amelyikben nincs benne az x_1, de ne az utolsót. Osszuk ezt a részintervallumot ismét 10 egyenlő részre és válasszunk a keletkező részintervallumok közül olyat, de ne a legutolsót, amelyben nincs benne az x_2. Ezt ismét osszuk 10 egyenlő részre és a keletkező részei közül válasszunk olyat, de ne a legutolsót, amelyben nincs benne az x_3, és így tovább... Az így kapott, egymásba skatulyázott, intervallumok x közös pontja nincs benne az x_1, x_2, ...x_n... sorozatban; pl: x_n-től azért különbözik, mert az n-edik felosztásnál más intervallumba esik, mint az x_n.

Megjegyzés: Az egyes környezeteket (részintervallumot) jelöljük: $U_1, U_2, \ldots U_n, \ldots$

Ekkor egyrészt $x_1 \notin U_1$, $x_2 \notin U_2$, .. $x_n \notin U_n$ és

másrészt $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \ldots \supset U_n \supset \ldots$

II.

A folytonos függvények halmazának számossága

A H halmaz részhalmazait karakterisztikus függvényeikkel jellemezve, a fenti tétel úgy is megfogalmazható, hogy a H halmazon értelmezett függvények közül azok, amelyek csak a 0 és az 1 értékeket vehetik fel, H-nál nagyobb számosságú függvényhalmazt alkotnak. Annál inkább érvényes az, hogy *a H halmazon értelmezett összes függvények halmazának számossága nagyobb a H-énál.* Pl. az intervallumon értelmezett összes függvények számossága nagyobb a kontinuuménál.

Ezzel szemben *az (a, b) intervallumon értelmezett folytonos függvények F halmazának számossága egyenlő a kontinuuméval.*

Elég azt megmutatnunk, hogy *a)* a kontinuum ekvivalens F egy részhalmazával, *b)* F ekvivalens a kontinuum egy részhalmazával.

Az *a)* állítás nyilvánvaló: minden valós c számnak feleltessük meg pl. azt a függvényt, amely állandóan c-vel egyenlő. A *b)* állítás bizonyítására először is azt jegyezzük meg, hogy egy folytonos függvény meg van határozva azáltal, hogy értékeit egy mindenütt sűrű halmazon, pl. a racionális pontokban megadjuk. Az (a, b) intervallum racionális pontjait egy $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ sorozatba szedve, az $f(x)$ folytonos függvényt tehát egyértelműen meghatározza az

$$y_n = f(r_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

számsorozat, és ennélfogva az

$$\eta_n = \left(1 + \frac{y_n}{1+|y_n|}\right)\Big/2 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

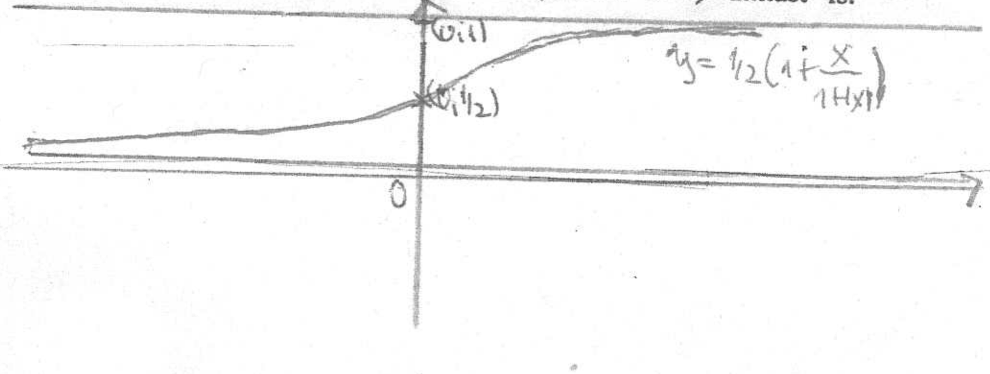
számsorozat is; utóbbi csupa 0 és 1 között levő valós számokból áll. Legyen

$$\eta_n = 0, u_{n1} u_{n2} \ldots$$

az η_n végtelen tizedes tört kifejtése (véges tizedes törtek esetében is a végtelen kifejezést használva), és rendeljük hozzá az $\{\eta_n\}$ sorozathoz a

$$c = 0, (u_{11})(u_{12}u_{21})(u_{13}u_{22}u_{31})(u_{14}u_{23}u_{32}u_{41})\ldots$$

valós számot (a zárójelekkel csak azt jelezzük, hogy az u_{ik} számjegyek milyen szabály szerint írandók egymás után). Ezzel minden $f(x)$ folytonos függvényhez egy c valós számot rendeltünk hozzá, mégpedig különböző függvényekhez különböző számokat, és ezzel bebizonyítottuk a *b)* állítást is.



III.

Bizonyítás-vázlat

Tétel: A természetes számok halmazának hatványhalmaza (összes részhalmazának halmaza) kontinuum számosságú.

Segédtétel (Biz. nélkül) Minden $x \in (0;1)$ valós szám előáll a következő „diadikus" felbontás formájában: ($2 \to 10$, akkor $\varepsilon_i = 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$)

$$x = \frac{\varepsilon_1}{2^1} + \frac{\varepsilon_2}{2^2} + \frac{\varepsilon_3}{2^3} + \dots + \frac{\varepsilon_n}{2^n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n}, \text{ ahol az}$$

$\{\varepsilon_n\}$ sorozat tagjai: 0 vagy 1. (ld. 2-es számrendszer)

Ezek után legyen pl. $A = \{3, 6, 9, 12, 15, \dots\}$ a 3-mal osztható pozitív egész számok halmaza (mint a természetes számok halmazának egy részhalmaza).

Legyen $\alpha = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^9} + \dots + \frac{1}{2^{3n}} + \dots = \frac{1}{7}$ (mértani sor)

Így ez egy $A \leftrightarrow \alpha$ hozzárendelés.

Általánosan:

$$\mathbb{N} \supseteq A \leftrightarrow \alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n}, \text{ ahol } \varepsilon_n \text{ vagy 1 vagy 0, attól}$$

függően, hogy $n \in A$ vagy $n \notin A$.

Megj.: Ez egy kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés a $\alpha \in (0;1)$ számok és a hatványhalmaz elemei között, ami bizonyítja, hogy a hatványhalmaz számossága: kontinuum.

Pl. Poz. páros számok halmazához: $\alpha = 1/3$
Poz. páratlan számok halmazához: $\alpha = 2/3$