ÉRDEKES FÜGGVÉNYEK

(Különleges függvények)

Matematika népszerűsítése kurzus

2026. 03. 26.

Dr Németh József
c. egyetemi tanár
SZTE TTIK Analízis tsz

I.

Dilemma: Tanároknak milyen témájú előadást?
Elemi matematika – felsőbb matematika. K.B

K-57-Bp *Riesz Frigyes* 1925 (90!); rektori *székfoglalója*.
"Elemi módszerek a felsőbb matematikában."
"Gyakran szembeállítják a matematika *elemeit* a *felsőbb* matematikával, ill. a középiskolai matematikát a főiskolaival úgy, mint amelyeknek tárgya, fogalmai, nyelve egymástól idegenek"...
"Kétszer kell felejteni", aki tanári pályára készül.
R. cáfolja: "a tudományok szervesen összefüggő rendszerek"

A mai témánk is az *elemi* és *felsőbb* matematika határán van.
Izgalmas (pl. eddig sokszor a *végtelennel* kapcsolatos viták; civakodások, ellentmondások...) (A kedvenc)
Most a *függvényről* beszélek (fontos fogalom már a középiskolában is.) (1850-körül került be a tankönyv)
Tanároknak fontos; ld. **Pólya**: "...ha a tudomány valamelyik területét (vagy elméletét, vagy fogalmát) tanítjuk, akkor az emberpalántáknak nagy lépések-

K.L.

kel nyomon kell követniük az emberiség szellemi fejlődését".

Newton, Leibniz; Euler: függvény - bármilyen kis szakaszon ismerjük, abból le lehet vezetni azt a szabályt, amelynek a függvény teljes menetében eleget tesz. (XVII–XVIII sz.)

Gond XVIII. sz. végén, ill. XIX. sz. elején a *fizikában* (hővezetés)

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} = \operatorname{sgn} x; \ -\pi < x < \pi.$$

Fourier

(emlékeztető – végtelen – Riemann–$\boxed{\text{Cauchy}}$, Weierstrass)

XIX. sz. Cauchy–Riemann–Weierstrass fejlesztette tovább

Pl. "analitikus" (komplex függvénytan; differenciálható; folytonos; hatványsor; differenciálással, integrálással újabb "analitikus", sőt egyenletes konvergenciával, stb.) Hatv. fgv: e^x, $\sin x$, $\cos x$, arctg x...

Taylor sor XVIII. sz.

XIX. sz. végén: " csak az analitikus függvények alkalmasak és méltók arra, hogy a matematikai analízis tárgyai legyenek".

Vö. (Szőkefalvi-Nagy Béla) "a természetben semmi sem analitikus".

"A legáltalánosabb és legmerészebb fogalomalkotások felelnek meg leginkább az érzékelhető világról alkotott elméleti képünk kialakulásához." (ld. előbb: hővezetés - Fourier sor - sgn x függvény)

(*) *Dirichlet, Riemann* (XIX. sz. közepén): a függvény általános definíciója $a(\in A) \xrightarrow{f} b(\in B)$; egyértelmű hozzárendelés („kavart") D-G

Sok dolog megdőlt.

Pl. a N-L tétel: $\int_a^b f' = f(b) - f(a)$. [Vito Volterra függvénye: a derivált integrálásával nem kapjuk vissza az eredeti függvényt...]

Reakció; ellenvetések (Poincare; Hermite, stb.)

"szörnyetegnek, patologikusnak (betegesnek), teratológikusnak (nyomorék, torzszülött)" nevezték ezeket az "új" függvényeket (vö.: Cauchy folytonossági definíciója), amelyek az "abszolút szigorúság jegyében születtek meg"; "bizarr függvények tömege"; "függvény, mely nem deriválható??" (métely) Picard

Mit meg? enged

Későbbi összegzés (Hilbert): XX.

"Az analízis tudománya a mértékelmélet, a metrikus terek elmélete, az absztrakt topológia, fraktálok, és más ágak létrehozásával jelentős fejlődésen ment keresztül – nem kis részben a "szörnyszülött" függvényeknek köszönhetően.

Dirichlet (1805–1859) féle függvényfogalom

„ y az x függvénye, ha minden x értékhez hozzátartozik y-nak egy pontosan meghatározott értéke, és egyáltalán nem lényeges, hogy milyen módon történik a hozzárendelés"

Függvény : egyértelmű hozzárendelés

A halmazelméleti függvényfogalom (pl. Cantor) ≈1870

„ A függvény rendezett párok olyan halmaza, amely nem tartalmaz azonos első elemmel rendelkező párokat
[(a; f(a))].

Milyen fgv tulajdonságok azok, amelyek esetleges patológiához (vezetnek), ill mitől érdekesek, szépek (különlegesek) a függvények? A precíz definíció ↔ áldozatai. (Riemann fgv) (XIX közepe)

I. ÉK; Grafikon; korl, szélsőérték

II. Folytonosság

III. Differenciálhatóság

IV. Integrálhatóság

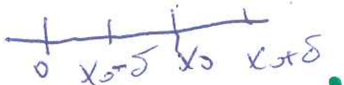
Ad I. (ÉK, Korl, SZÉ, Grafikon)

a) $f(x)=\begin{cases} q, & \text{ha } x=\frac{p}{q},\ p,q \text{ egész}, (p,q)=1,\ q>0 \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$

Állítás: f egy pontban sem lokálisan korlátos

(Def. x_0-ban lokálisan korlátos f, ha $\exists\,\delta>0$ hogy $f(x)$ korlátos x_0 δ sugarú környezetében)

Biz: Belátható, hogy $\forall x_0$; $\forall$ környezetében $\exists$ bármilyen nagy nevezőjű $\frac{p}{q}$ rac. szám (Ábra). Amiből triviálisan adódik az állítás!



$\frac{1}{q}<\delta$

téves

(Arkhimédesz)

b) $f(x)=\begin{cases} (-1)^q\,\frac{q}{q+1}, & \text{ha } x=\frac{p}{q},\ (p,q)=1,\ q>0 \\ 0 & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$

Állítás: Az f egyetlen pontban sem veszi fel helyi szélsőértékét.

Biz: $\frac{q}{q+1}=1-\frac{1}{q+1} \Rightarrow \forall q$ esetén $1-\frac{1}{q+1}\uparrow$, ha q nő.

c) $f(x)=\begin{cases} r+s\sqrt{2}, & \text{ha } x=s+r\sqrt{2},\ (r,s \text{ rac.}) \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$ (SIERPINSKI FGV)

$r+s\sqrt{2}$ előállítás egyértelmű

Állítás: A fgv grafikonja mindenütt sűrű az (x,y) síkon, azaz $\forall\,(x_0; f(x_0))$ ponthoz $\exists\,(x_n, f(x_n)) \longrightarrow (x_0; f(x_0))$

Köv: A grafikon minden pontjá $\forall$ környezetében végtelen sok grafikon-pont van.

Biz: %.

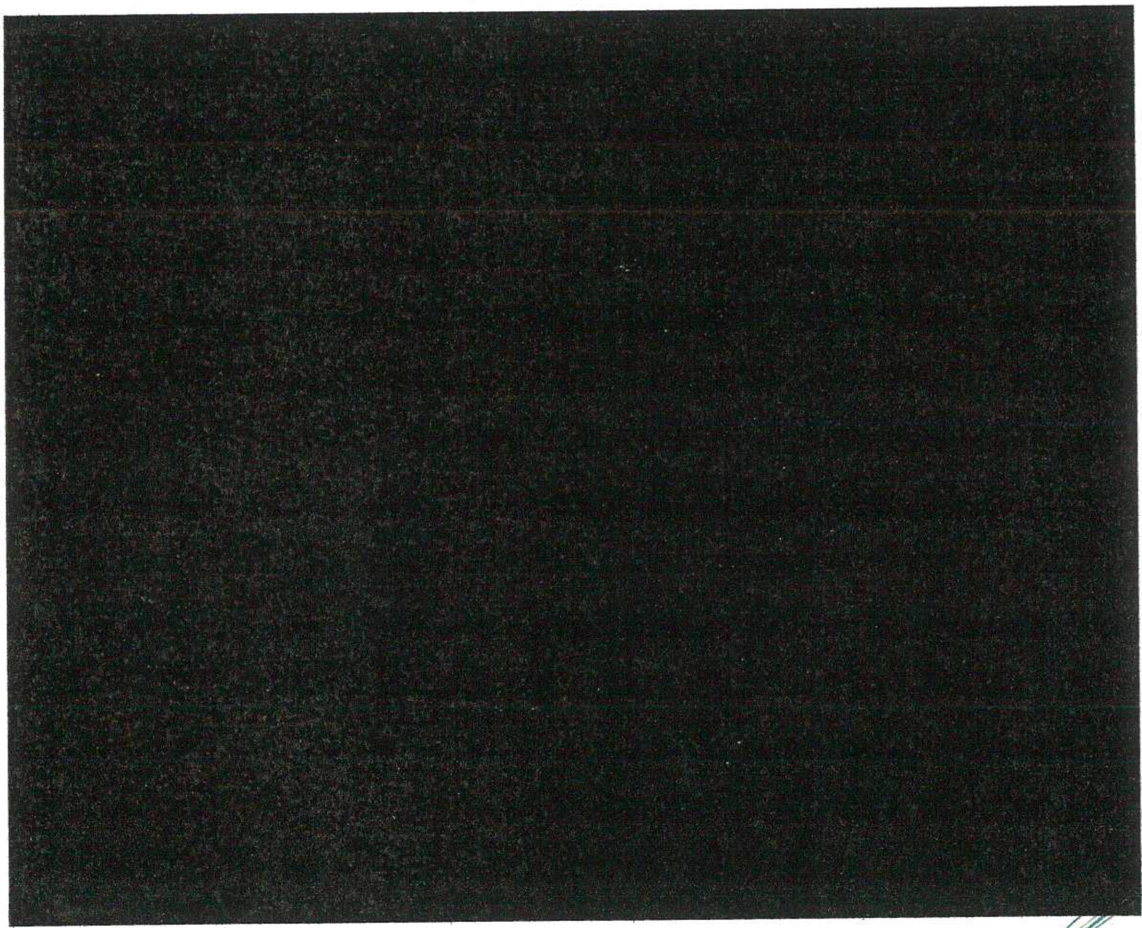
SIERPINSKI-FÜGGVÉNY (≈ 1950)(0,1,2,..)

Grafikonja mindenütt sűrű (Mit jelent ez???)

DEF:

$$f(x) = \begin{cases} r + s\sqrt{2}, & \text{ha } x = s + r\sqrt{2} \ (r, s \text{ racionális}) \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Megj. az $r + s\sqrt{2}$ előállítás egyértelmű.



GRAFIKON

(nem lehet „hézag" „pontok"

MAKAY GÉP???

FEKETE LYUK

β) Mindenütt sűrűn vannak a síkon a „grafikon" pontjai. Ami azt jelenti, hogy a síkon bárhol megadunk egy akármilyen kis sugarú kört ebbe végtelen sok $(x; f(x))$ pont fog esni. Egészen pontosan: tetszőleges x_0 pont és tetszőleges A szám esetén létezik olyan $\{x_n\}$ sorozat amelyre

$$\{x_n\} \to x_0$$
$$\{f(x_n)\} \to A.$$

Idézzük fel a definíciót:

$$f(x) = \begin{cases} s + r\sqrt{2}, & \text{ha } x = r + s\sqrt{2} \\ 0, & \text{ha } x\text{-re nincs ilyen előállítás} \end{cases}$$

Ezek után legyen (x_0, A) tetszőleges síkbeli pont. Megadunk olyan $\{x_n\}$ sorozat konstrukcióját, amelyre $(x_n, f(x_n)) \to (x_0; A)$.

Mindenesetre léteznek olyan $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ és $\{c_n\}$ racionális sorozatok, melyekre

$$a_n \to x_0, \quad b_n \to A, \quad c_n \to \sqrt{2}.$$

Legyen $x_n = (b_n c_n - a_n) + (a_n c_n - b_n)\sqrt{2}$

Nézzük $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A\sqrt{2} - x_0 + (x_0\sqrt{2} - A)\sqrt{2} = x_0$

és

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \left[(a_n c_n - b_n) + (b_n c_n - a_n)\sqrt{2}\right] =$$
$$= (x_0\sqrt{2} - A) + (A\sqrt{2} - x_0)\sqrt{2} = A.$$

Amit bizonyítani akartunk.

— f(x) (Lebesgue függvény) (XIX–XX)

A [0;1]-en értelmezett fgv, melynek értékkészlete is [0;1] és bármely részintervallumon is felveszi az egész [0;1] intervallumot, mint értékkészletet.

Lebesgue függvény

(Kalmár L.: Bevezetés az analízisbe) (Ker·Bek)

Létezik olyan a [0, 1], intervallumon értelmezett függvény, melynek értékkészlete is [0, 1], és bármely részintervallumon is felveszi az egész [0, 1] intervallumot mint értékkészletet. Ez a függvény is dacol a „szemléletes" elképzelésekkel. Íme a konstrukció:

Legyen $x=0, a_1a_2a_3\ldots$ azaz végtelen tizedestört formában előállítva, és

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ ha } 0, a_1a_3a_5\ldots \text{ irracionális (nem szakaszos)}\\ 0, a_{2n}a_{2n+2}\ldots, \text{ ha } 0, a_1a_3a_5\ldots \text{ racionális és az első periódus } a_{2n-1}\text{-nél kezdődik.}\end{cases}$$

A [0, 1] tetszés szerinti $[\alpha, \beta]$ részintervallumában nyilván van olyan $0, a_1a_2\ldots a_{2n}$ szám, melyre

$$0, a_1a_2\ldots a_{2n}\in[\alpha, \beta];$$

és

$$0, a_1a_2\ldots a_{2n-1}\in[\alpha, \beta]; \quad \text{és } a_{2n-1} \text{ nem 0 vagy 1.}$$

ezért

$$0, a_1a_2\ldots a_{2n}\ 0\ a_{2n+2}\ldots\in[\alpha, \beta];$$

és ha $a_{2n+1}=0$; $a_{2n+3}=1$, $a_{2n+5}=0$, és így folytatva is felváltva jön 1 és 0, akkor $0, a_1a_3a_5\ldots$ racionális és az első periódus a_{2n+1}-gyel kezdődik, mert $a_{2n-1}\neq 0$ vagy 1. Ezek a meggondolások egyébként értékes részfeladatok lehetnek a végtelen tizedestörtek elméletére és érdemes még részletesebben is végiggondolni, tekintettel bizonyos esetek kétféle lehetséges felírására.

Legyen mármost $y_0=0, b_1b_2\ldots$ a [0, 1] tetszőleges pontja. Az $x_0=0, a_1a_2\ldots a_{2n}\ 0\ b_1\ 1\ b_2\ 0\ b_3\ 1\ b_4\ldots$ pont $[\alpha, \beta]$-ban van, és

$$f(x_0)=0, b_1b_2\ldots$$

Más szóval ez a függvény teljes értékkészletét az értelmezési tartomány bármely kis részén felveszi. Bizonyítsuk be (nagyon egyszerű), hogy ez a függvény olyan tulajdonságú, hogy az $(x;f(x))$ pontok az egységnégyzetben mindenütt sűrűn helyezkednek el. (A „görbe" fogalomnak semmiképp meg nem felel a ponthalmaz).

Sőt a [0, 1] minden értékét végtelen sokszor felveszi a függvény. (Vigyázat, azért egyértékű függvény ez!)

! ⊕ dzat függvény

Ad II. (Folytonosság). 2 def; Cauchy, Heine (plüss maci) (Vers) taps.

– Dirichlet-fgv (sehol sem f.) (Ábra köv. oldal)

– Csak egy pontban folytonos (Ábra köv.) kréta

– Csak az. egész helyeken folyt (Ábra köv.)

– Csak a rac.-pontokban folyt (??? Van ??? → [VÁLASZ: később] (≈1900)

– Riemann fgv. (ld. 13. oldal)
($f \in C_{x_0}$, ha $x_0 \in \overline{Q}$, $f(x) \notin C_{x_0}$ ha $x_0 \in Q$)

MA: Két fogalom közé csoportosítva 1-2 "bizarr" függvényről fogok beszélni. (Cím?)

A) *Folytonosság*;

B) "*Grafikon*"

A)

α) f folytonos x_0-ban, ha $\forall\,\varepsilon\,(>0)$- hoz $\exists\,\delta(>0)$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ [vö.: nem kell felemelni a ceruzát a rajz közben] [Kicsit változik x, kicsit változik y.]

β) $x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$

a) Dirichlet-fgv.

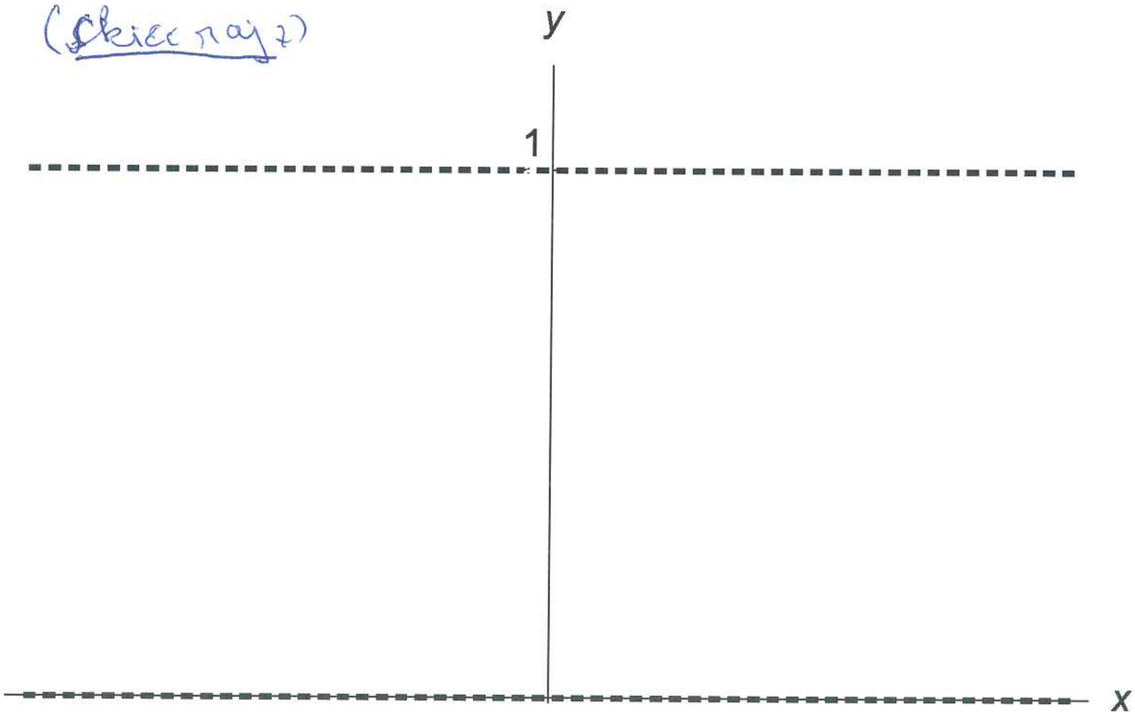
Fgv.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ rac.,} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irrac.} \end{cases}$$

Sehol sem folytonos függvény.

A1–

Ábra:
(Skicc rajz)

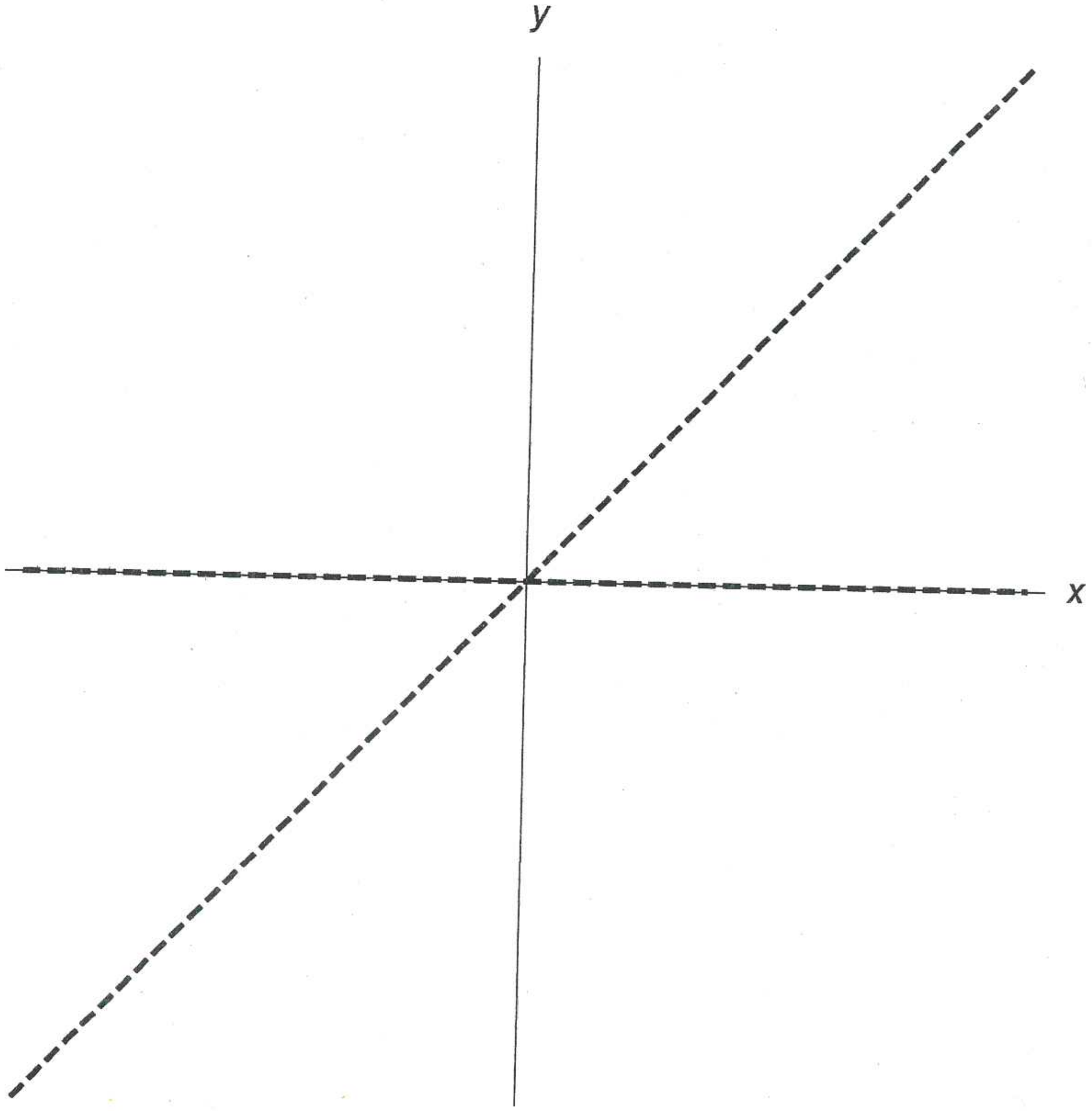


b)

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \text{ rac.,} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irrac.} \end{cases}$$

-12-

Ábra:



Csak egy pontban folytonos. (Kréta) Diffható?

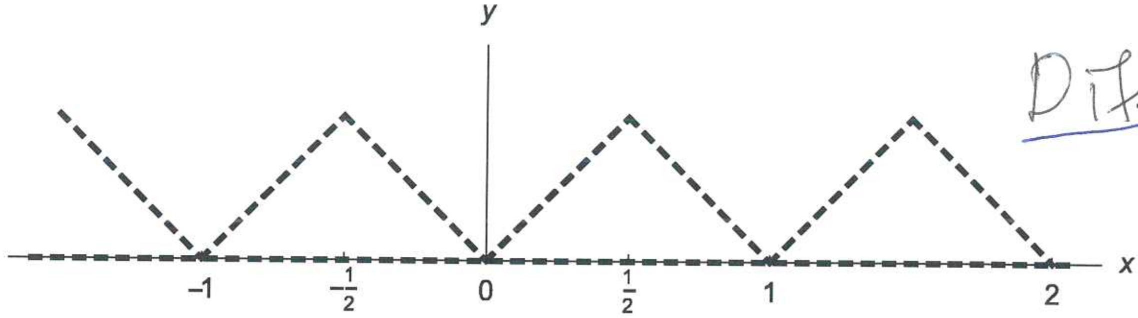
c)

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{ha } -1/2 \le x \le \frac{1}{2} \text{ és } x \text{ racionális;} \\ 0, & \text{ha } -1/2 < x < \frac{1}{2} \text{ és } x \text{ irracionális,} \end{cases}$$

és $p = 1$ periódussal folytatva $\mathbb{R}$-en.

A3-

Ábra:



Diffh?

Csak az egész helyeken folytonos.

d) f: csak a racionális helyeken folytonos? ???

∃??

Szünet – gondolkodás (10') (nekem 100'-se lett volna elég)

e) *Riemann*-féle függvény

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{ha } x = \frac{p}{q};\ p, q \text{ egész; } (p,q) = 1;\ q > 0; \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális.} \end{cases}$$

∃???

ARKH. AX.

α) $f \notin C_{x_0}$, ha $x_0 \in \mathbb{Q}$ $(x_0 = \frac{p}{q})$

$(\boxed{x_n \in \overline{\mathbb{Q}} \text{ és } x_n \to x_0}$; $f(x_n) \equiv 0$; $f(x_n) \not\to f(x_0) = \frac{1}{q})$!

β) $f \in C_{x_0}$, ha $x_0 \in \overline{\mathbb{Q}}$

Biz. (vázlat) Legyen $x_0 \in \overline{\mathbb{Q}}$ és $x_0 \in (0;1)$ és pl. $\varepsilon = \frac{1}{1000}$.

Nyilván csak véges sok 1000-nél kisebb nevezőjű rac. szám van a $(0;1)$-en; legyen $\delta(> 0)$ az x_0-hoz legközelebbinek a távolsága x_0-tól. $\Rightarrow f(x) \leq \frac{1}{1000}$, ha $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, hiszen ha $x = \frac{p}{q}$, akkor

$f(x)=\frac{1}{q}\le\frac{1}{1000}$ (mert $q\geq 1000$), ha $x_0\in\bar{\mathbb{Q}}$, akkor $f(x_0)=0$

Tehát $|f(x)-f(x_0)|=|f(x)|\le\frac{1}{1000}=\varepsilon$, ha $x\in(x_0-\delta; x_0+\delta)$

Azaz $f\in C_{x_0}$ (a Cauchy-definíció értelmében)

Tehát a Riemann-fgv folytonos az irracionális pontokban és nem folytonos a racionális pontokban.

Emlékeztetünk egy fogalomra (Valós számhalmazokról van szó)

Egy halmazt 0-mértékűnek (vagy 0-halmaznak) nevezünk, ha lefedhető tetszőleges előre adott $\varepsilon>0$-nál kisebb összhosszúságú intervallumrendszerrel.

(*) Tétel: Ha egy számhalmaz megszámlálható számosságú (ekvivalens $\mathbb{N}$-nel), akkor 0-mértékű halmaz.

Biz. Legyen $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ megszámlálható halmaz és legyen $\varepsilon>0$.

Ekkor a_1-et fedjük le $\frac{\varepsilon}{2}$ hosszúságú intervallummal

a_2-t —"— $\frac{\varepsilon}{2^2}$ —"— —"—

⋮

a_k-t —"— $\frac{\varepsilon}{2^k}$ —"— —"—

Így az összhosszúság: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k}=\varepsilon\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\varepsilon$.

Piros cérna

LÁTOM, de nem értem

1. Megjegyzés: Mivel $\mathbb{Q}$ megszámlálható, így $\mathbb{Q}$ 0-mértékű halmaz.

2. Ha valamely állítás egy legfeljebb 0-halmaz kivételével teljesül, akkor (azt mondjuk) m.m. (majdnem mindenütt) teljesül.

Így a Riemann-fgv m.m. folytonos függvény $\mathbb{R}$-en.

3. A fenti (*) tétel nem megfordítható %

Cantor-féle triadikus halmaz

① zárt, ② kontinuum számosságú ③ 0-mértékű (lefedhető tetsz. összhosszúságú inf. rendszerrel).

A konstrukció:

Osszuk fel a $[0,1]$ zárt intervallumot az $\frac{1}{3}$ és $\frac{2}{3}$ pontokkal három egyenlő részre és hagyjuk el belőle az $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ nyitott intervallumot.

A megmaradt $\left[0; \frac{1}{3}\right]$ és $\left[\frac{2}{3}; 1\right]$ zárt intervallumok mindegyikéből hagyjuk el középső nyitott harmadrészüket, azaz az $\left(\frac{1}{9}; \frac{2}{9}\right)$ ill. $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ intervallumokat. És így tovább ... folytassuk ezt az eljárást minden határon túl.

Ad ① A megmaradt C halmaz zárt (mert mindig nyitottakat hagytunk el.

Ad ②: Számossága a kontinuuméval egyenlő
(nehéz a bizonyítás) (Ld. Sz-Nagy: Valós fgv.)

Ad ③. Mivel az elhagyott intervallumok hossza
$\frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{1}{27} + \dots 2^{n-1} \frac{1}{3^n} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$, így a megmaradt (zárt) intervallumok összhossza $\left(\frac{2}{3}\right)^n$, tehát $< \varepsilon$, ha n elég nagy. Ezek az intervallumok pedig lefedik C-t. Ezzel az állítást bizonyítottuk.

Állítás (13 o.-d) Nincs olyan valós függvény amelyre fennállna, hogy $f \in C_{\mathbb{Q}}$ és $f \notin C_{\overline{\mathbb{Q}}}$.

(A bizonyítás Volterra ötlete alapján Pintér Lajos közölte (Polygon I. kötet 2. szám) (egy várható tanulói kérdés)) Legyen

$$f = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{ha } x = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{Z};\ (p,q) = 1;\ q > 0 \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális.} \end{cases}$$

az előzőkben vizsgált Riemann-függvény) és g olyan függvény, amely az irracionális pontokban nem folytonos, a racionális pontokban pedig folytonos.

A bizonyítás alapgondolata: Adott pozitív számhoz (pl. $\frac{1}{n}$; $n \in \mathbb{N}$) tudunk adni olyan zárt intervallumot, hogy ebben bármely két pontot is veszünk itt f értékeinek az eltérése ($|f(x_1) - f(x_2)|$), és g értékeinek az eltérése ($|g(x_1') - g(x_2')|$) kisebb, mint $\frac{1}{n}$. (f-nél x_0 irracionális; g-nél $\overline{x_0}$ racionális és $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_0)|$, hasonló g-re is áll: $|g(x_1') - g(x_2')| \leq |g(x_1') - g(\overline{x_0})| + |g(x_2') - g(\overline{x_0}|$.

Ha tehát x_0-hoz δ_n sugarú az a környezet, amelyben az f függvény értékei eltérése kisebb, mint $\frac{1}{n}$, akkor ebből a környezetből veszünk $\overline{x_0}$-t és ennek lesz egy $\overline{\delta_n}$ sugarú környezete úgy, hogy ebben a g értékei eltérése lesz kisebb $\frac{1}{n}$-nél. Ekkor $[a_n, b_n]$ legyen a két környezet metszete.

Majd csökkentjük $\frac{1}{n}$-et pl. $\frac{1}{n+1}$-re és az előző zárt intervallumban találunk ehhez olyan zárt intervallumot ($[a_{n+1}, b_{n+1}]$) amelyben f és g eltérései már $\frac{1}{n+1}$-nél kisebbek. Így folytatva egymásba skatulyázott zárt intervallumok sorozatát kapjuk. Ezeknek van közös pontja. (intervallum lenne, akkor f és g konstans fgv)
A közös pont – durván szólva – rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy ha x-et "kicsit" megváltoztatjuk, akkor a függvényértékek is "kicsit" változnak, azaz egy ilyen pontban f is és g is folytonos kellene, hogy legyen, ilyen pont azonban nincs (mert olyan pont, amely racionális is és irracionális is – nincs.)

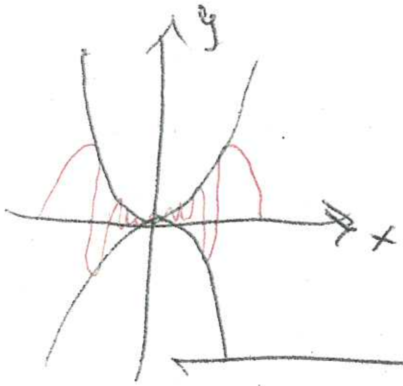
Precízen: $\varepsilon = 1/M \to [a_M, b_M]$ lesz a kívánt környezet...

-18- Definíció, ~~[illegible]~~ $m=f'(x_0)$ ÉRINTŐ

III. DIFFERENCIÁLÁS

– $f(x)=x^3$ belemetsz az érintőbe

– $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & \text{ha } x\neq 0 \\ 0, & \text{ha } x=0 \end{cases}$



$f'(0)=0$
végtelen sokszor átmetszi az „érintőt" a görbe

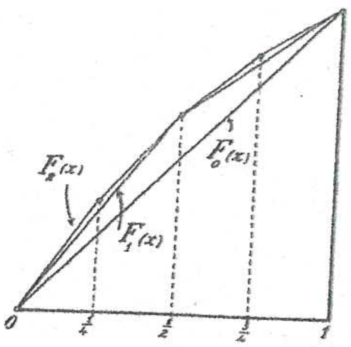
Meg. $f'(x)\notin C_0$, de B–D telj.

– $\exists f$: $f\uparrow$ és $f'(x)=0$ m.m. (ld. Sz.-Nagy B.: Valós fgv-k és..)

A konstrukciót itt láthatjuk.
(a bizonyítást a könyvben

Vö. $\boxed{x+\sin x}$

~~is megkövetéljük~~. Meg fogunk ugyanis adni a $[0,1]$ szakaszon egy olyan *szigorúan növekvő folytonos $F(x)$ függvényt, amelyre majdnem mindenütt $F'(x)=0$.*



27. ábra

Az $F(x)$ függvényt egy $\{F_n(x)\}$ sorozat határértékeképpen fogjuk értelmezni; az $F_n(x)$ függvény folytonos, és a képe egy olyan törtvonal, amelynek szögpontjaihoz az $x=\frac{k}{2^n}$ $(k=0,1,\ldots,2^n)$ abszcisszák tartoznak.

Legyen $F_0(x)=x$. $F_1(x)$ egyezzék meg $F_0(x)$-szel a $0, 1$ pontokban, az $x=\frac{1}{2}$ pontban pedig legyen az értéke $(1+t)/2$, ahol t adott szám, $0<t<1$. Általában, ha $F_n(x)$-et már értelmeztük, legyen $F_{n+1}(x)=F_n(x)$ az $x=k/2^n$ pontokban $(k=0,1,\ldots,2^n)$; míg a felezéssel kapott új osztópontokban legyen

$$(10) \qquad F_{n+1}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{1-t}{2}F_n(\alpha)+\frac{1+t}{2}F_n(\beta);$$

itt $\alpha=k/2^n$, $\beta=(k+1)/2^n$ a felezett szakasz végpontjai.

Mindegyik $F_n(x)$ függvény növekvő. Minthogy, mint azonnal be lehet látni,

$$0\leqq F_n(x)\leqq F_{n+1}(x)\leqq 1,$$

azért, ha $n\to\infty$, az $\{F_n(x)\}$ sorozat egy $F(x)$ határértékhez tart, amely szintén csak növekvő függvény lehet. Meg fogjuk mutatni, hogy $F(x)$ szigorú értelemben növekvő, folytonos és majdnem mindenütt $F'(x)=0$.

– Riemann-függvény (f folytonos m.m.), de sehol sem differenciálható (TÉTEL)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{ha } x = p/q, \ p,q \in \mathbb{Z}, \ (p,q)=1, \ q>0. \end{cases}$$

Biz. Segédtétel Legyen $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, akkor $\exists$ végtelen sok p_n, q_n egész szám, hogy

(*) $$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}$$

(ld. Hajnal Péter: Elemi kombinatorika... Polygon 1997; 3. oldal)

[A skatulyaelv ad gyönyörű bizonyítást]. (HF)

Rátérünk a fő állítás bizonyítására.

A fgv csak az irracionális helyeken folytonos, tehát csak ott lehet diff.ható (!)

Ha $x_0 \in \overline{\mathbb{Q}}$, akkor $\forall x_n \in \overline{\mathbb{Q}}$ sorozatra

$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = 0 \Rightarrow$ ha a derivált létezik, akkor csak 0 lehet.

Legyen $x_n = \frac{p_n}{q_n} \to x_0$ a (*)-ban szereplő sorozat ($\alpha = x_0$ szereposztás), erre

$$\left| \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \right| = \left| \frac{\frac{1}{q_n} - 0}{\frac{p_n}{q_n} - x_0} \right| = \frac{1}{|p_n - x_0 q_n|} > |q_n| \to \infty$$

$\Rightarrow f \notin D_{x_0}$

Kérdés, hogy van-e olyan fgv, amely a racionális pontokban nem diff ható, az irracionális pontokban pedig differenciálható. (R.f. analóg

I. Tétel (Sz. N.B. Valós fgv. és fgv. sorok) $\boxed{91.\text{oldal}}$ (*)

Ha E az egyenesen tetszés szerint adott nullamértékű halmaz, megszerkeszthető egy olyan monoton növekvő folytonos függvény, amely E pontjaiban nem deriválható. (Biz ld *)

II. Tétel (Lebesgue) Minden monoton függvény m.m. differenciálható (Riesz Frigyes 1931)

A fenti két tételből ⟶ Van olyan fgv, amely a Q-ban nem differenciálható (E sze-repét Q játssza az I. tételben), de a Q m.m. pontjában (legfeljebb 0-mértékű halmaz kivételével) differenciálható (mivel monoton) (ld. I. ∧ II.)

(Lehet, hogy ∀ ~~pont~~jában???)

(szerintem igen)

Térjünk vissza a Riemann-függvényre

Az tehát egy m.m. folytonos és sehol sem differenciálható függvény

Kérdés, hogy van-e olyan mindenütt folytonos, de sehol sem differenciálható („bitang, tüskés fgv)

Megjegyzés

A XIX. század elején Ampère vizsgálta a fenti problémát.

1806-ban megfogalmazta, hogy egy folytonos fgv-nek legfeljebb izolált pontokban lehet „szingularitása", azaz a fgv-nek mindenütt van érintője, esetleg néhány pontot kivéve. (néhány) TEKINTÉLY.

Fél évszázad után jött az áttörés.

Riemann-példája 1865-ből való.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^2} \quad \text{(ld. az ábrát!)}\ \%$$

Sejtette, hogy ~~[illegible]~~ nem minden pontra igaz, hogy nem diff.-ható a fgv, de nem sikerült precízen ezt rendbetenni.

Hardy-nak sikerült bizonyítani, hogy

vannak olyan pontok, ahol differenciálható a fgv. J. Gerver (1970) belátta, hogy az $x = \pi \cdot \frac{2p+1}{2q+1}$ pontokban diff.ható a fgv és $f'(x) = 1/2$.

Az első olyan publikált eredmény, amely mindenütt folytonos, de sehol sem diff.ható Weierstrass-tól származik. 1872-ben.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^k \cos(3^k x) \qquad \text{(ld. ábra) \%}$$

A legegyszerűbb ilyen példa van der Waerden példája (1920) (ld. az ábra) %

1. Megjegyzés: Bolzano (1830) valószínű megelőzte Weierstrasst csak mivel börtönben volt, nem publikálhatta.

2. Megjegyzés. Hasonló konstrukciót adott Faber és a magyar Geőcze Zoárd is.
(XX sz. első fele) (XX sz. eleje)

Weierstrass példája. Riemann próbálkozása – sehol se monoton, mindenütt folytonos függvény)

Van der Waerden-példája

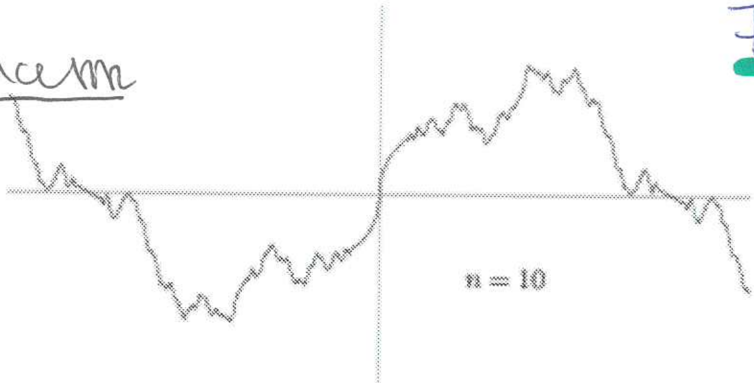
Riemann: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^2} = f(x)$

Weierstrass: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^k \cos 3^k x = f(x)$

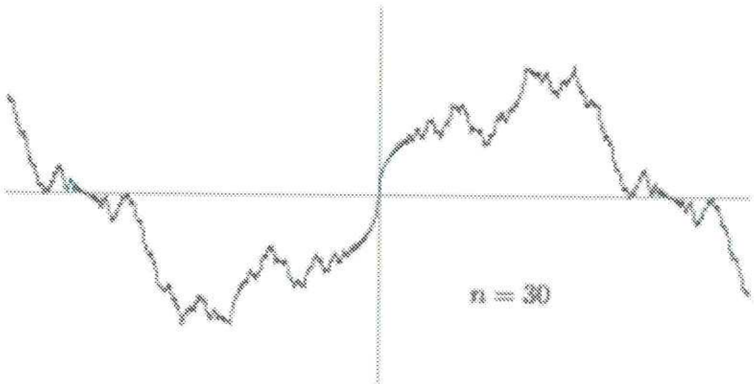
Biz. Szász Pál (XIX)
Off. és inf. századi
-tól
Fejér Lipót

Ábrák:

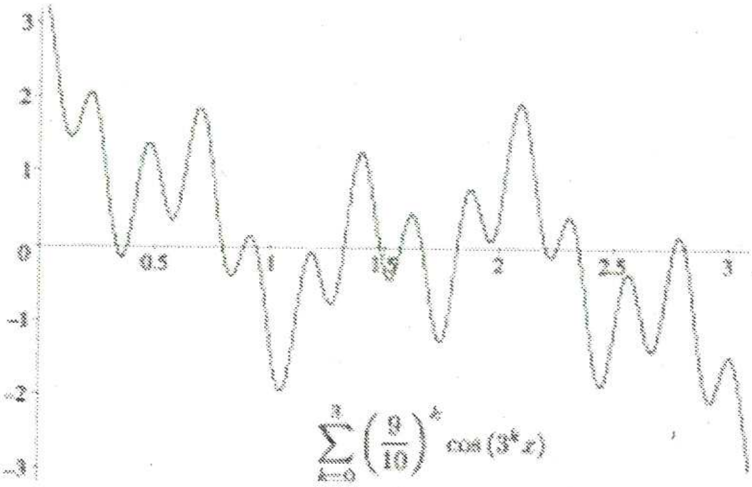
A) Riemann

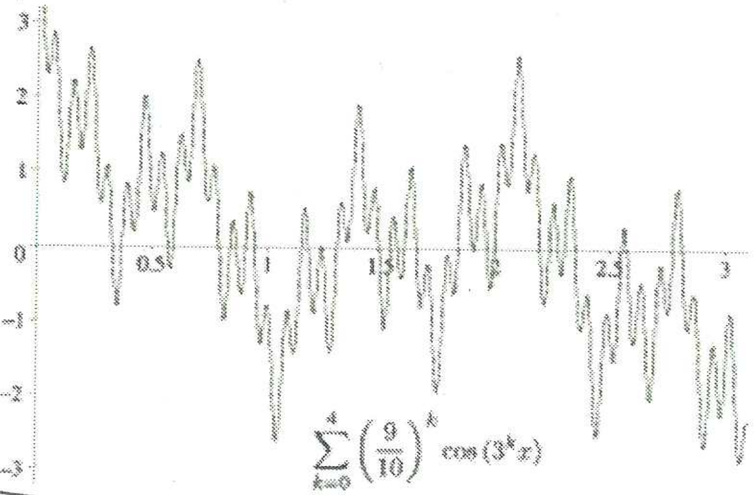


Még ezt



B) Weierstrass





~~A korábban vizsgált Riemann-függvény ábrája.~~

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{ha } x = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{Z},\ (p, q) = 1,\ q > 0 \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális.} \end{cases}$$

MAKAY (148)

C) Van Der Waerden példája:

$\{x\}$ legyen a valós x-nek a legközelebbi egész számtól vett távolsága.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{2^n \cdot x\}}{2^n}$$ (módosította)

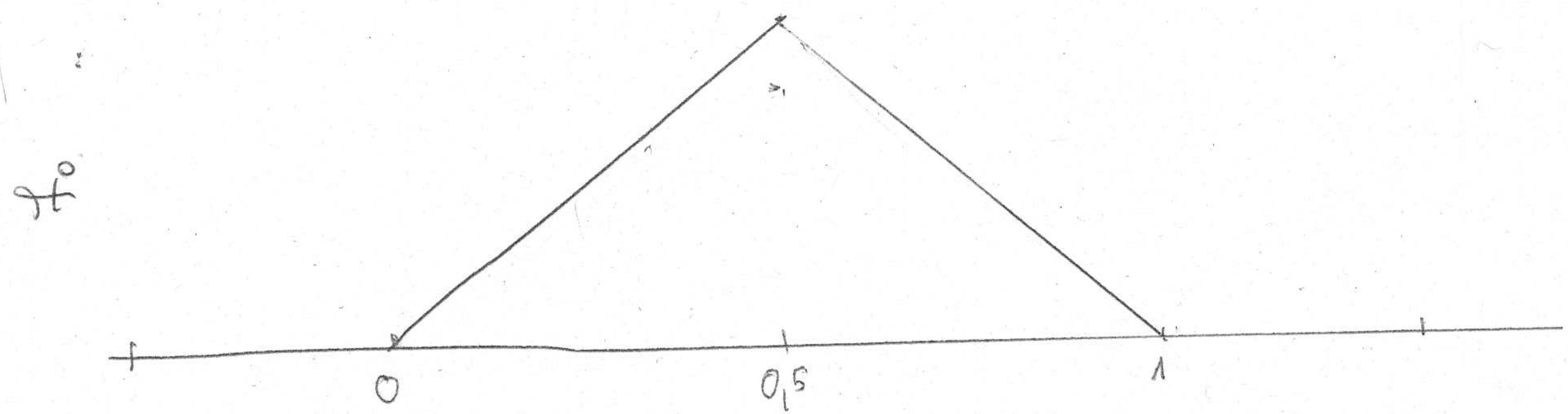
$$\boxed{10^n \sim 2^n}$$

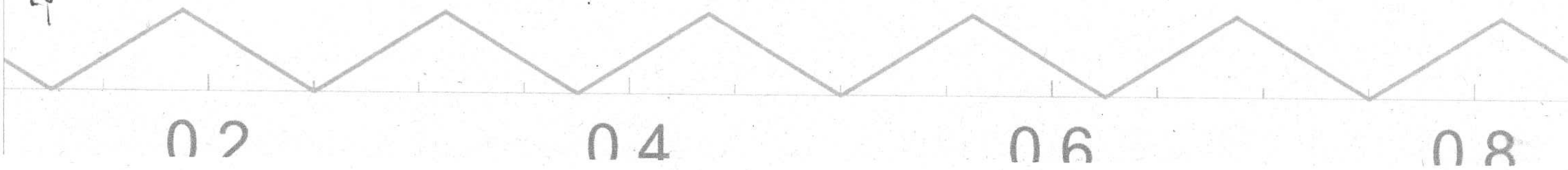
MAKAY GÉZA

VAN DER WAERDEN

$\{x\}$: a valós x-nek a legközelebbi egész számtól vett távolságát.

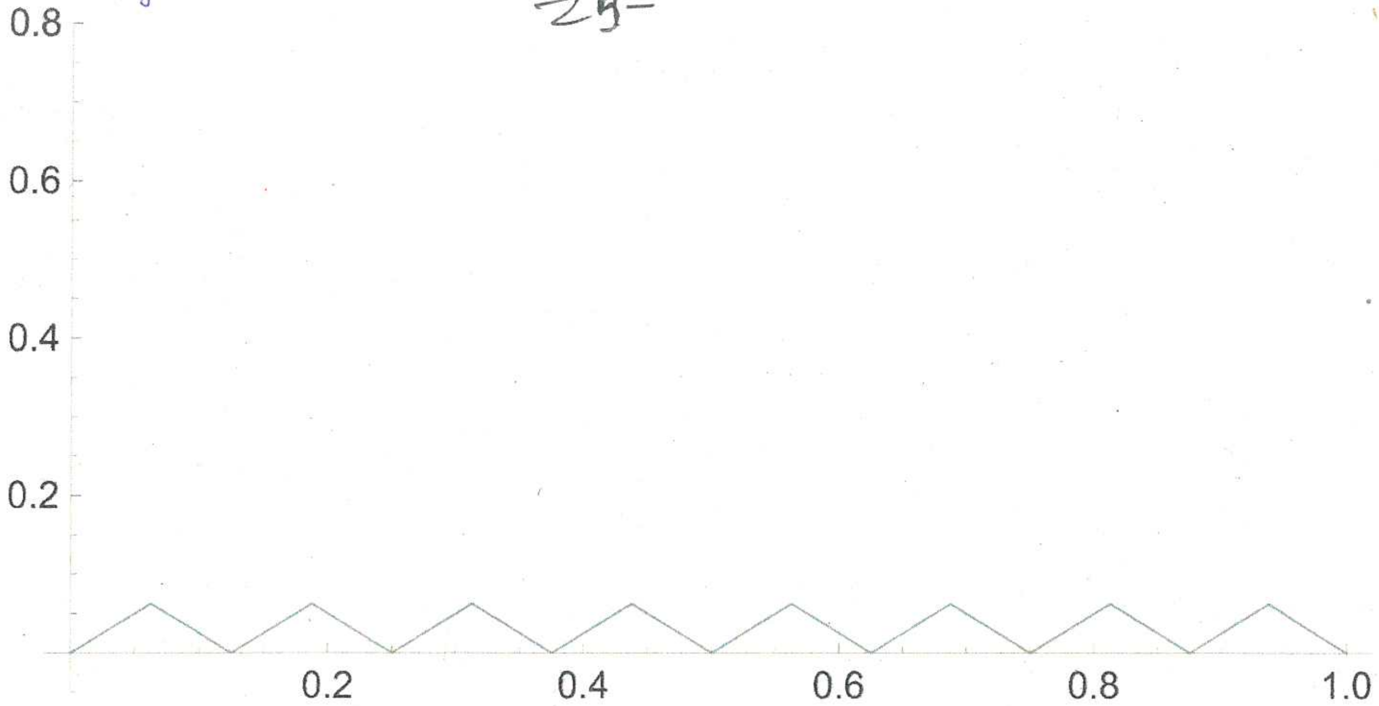
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{2^n x\}}{2^n}$$





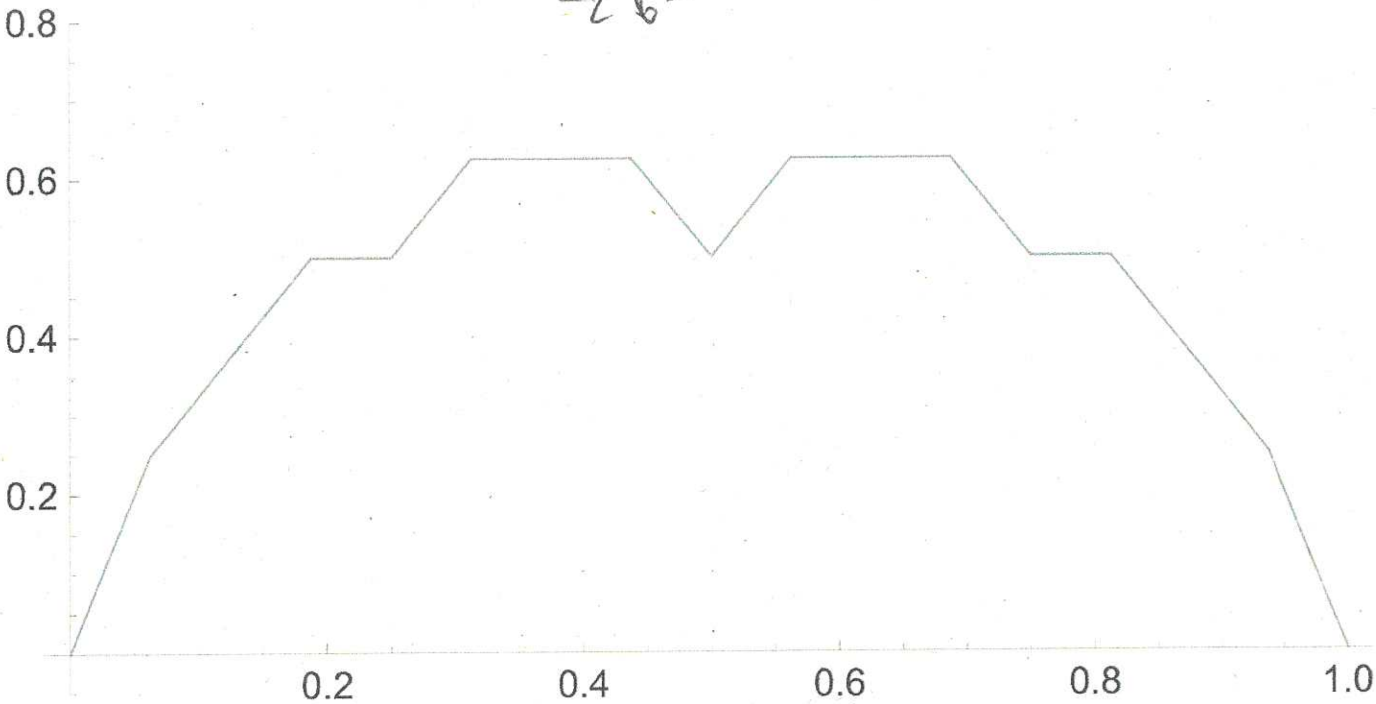
3 $\boxed{3}$ pg

-25-



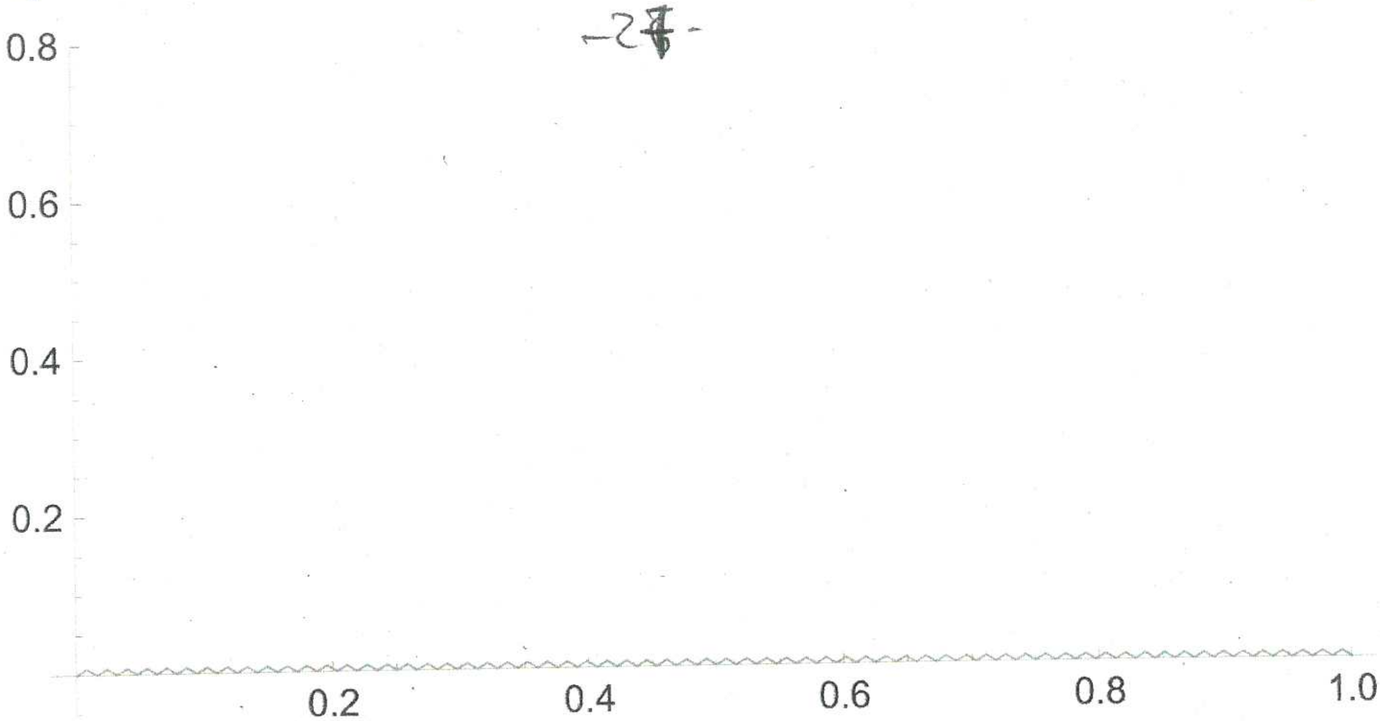
png $\sum 3$

-26-



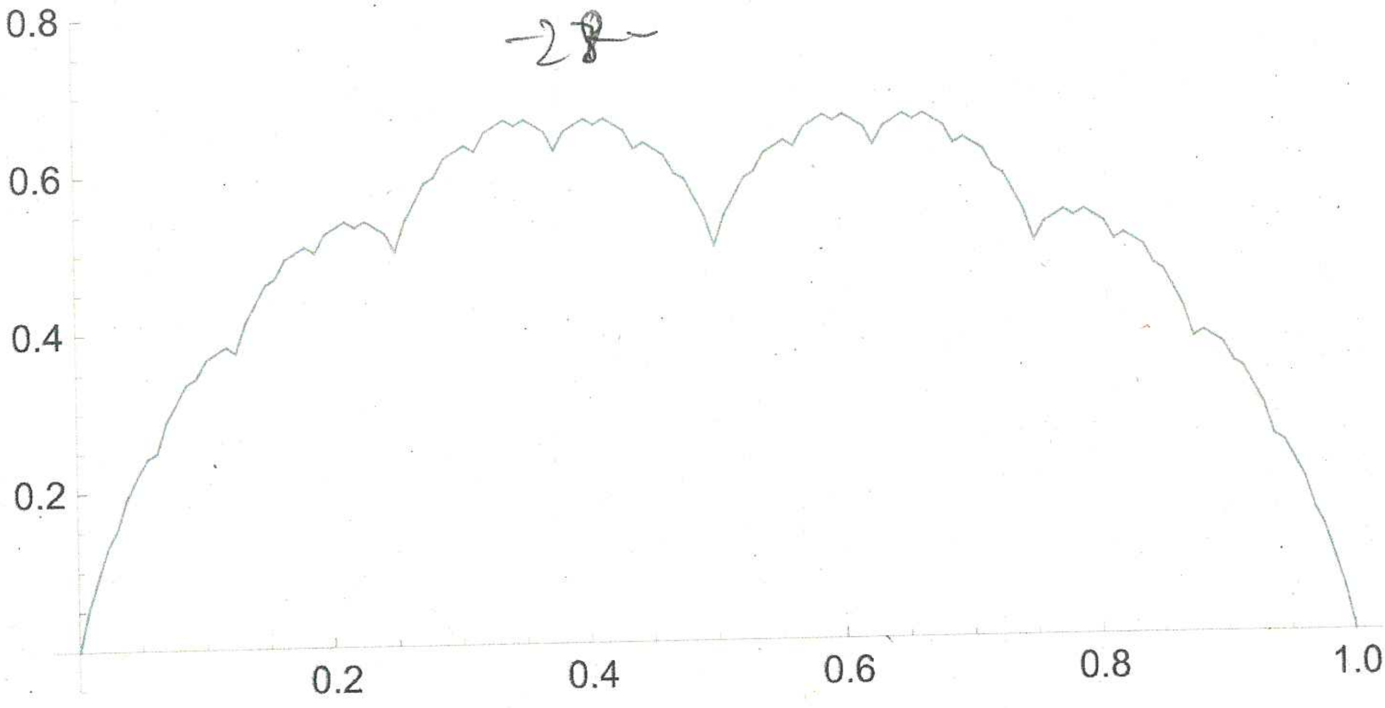
tag6.png

-27-

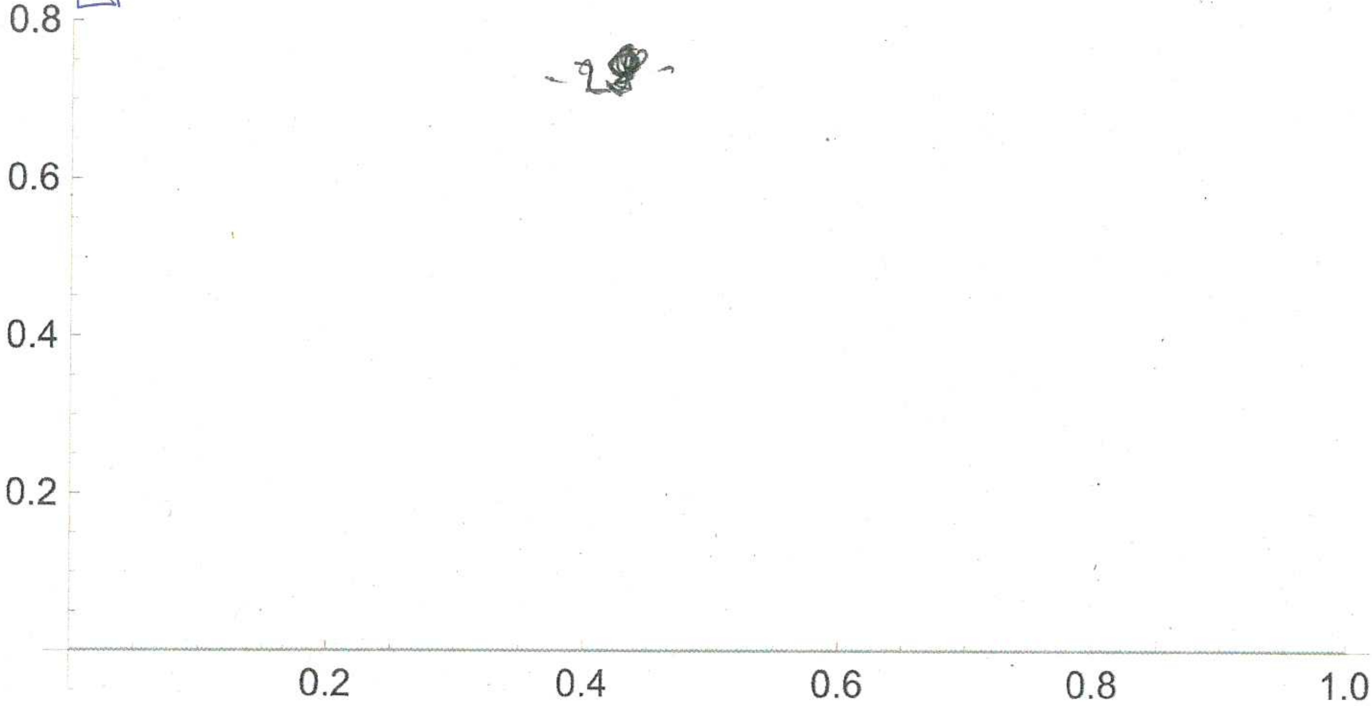


$\sum$ ossz6.png

-28-



$\boxed{8}$

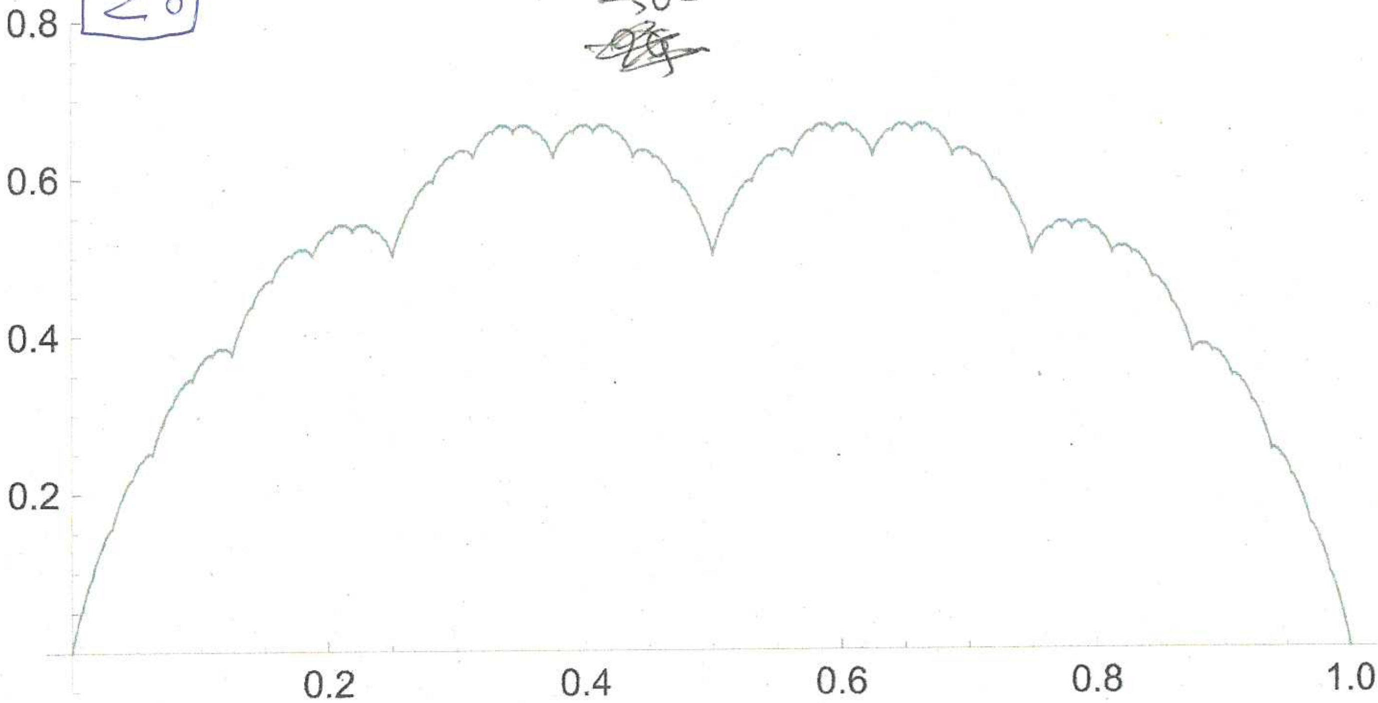


.png https://webmail.u-szeged.hu/horde/imp/view.php?popup_view=1&...

$\boxed{\Sigma 8}$

-30-

~~29~~



ad IV. Integrál def. (görbe alatti terület)

— Riemann fgv.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{q}, \text{ ha } x=\frac{p}{q}, & p,q\in Z; (p,q)=1; q>0\\ 0, \text{ ha } x \text{ irrac.}\end{cases}$$

Állítás: $f(x)\in R_{[0;1]}$. „Görbe alatti terület"

Bizonyítás:

a) Def. alapján (ld. 32. oldalon)

b) A R-integrál Lebesgue-kritériuma alapján, ami így szól:

Tétel: Ha f korlátos és m.m. folytonos $[a;b]$-n, akkor $f\in R[a;b]$

(Fi-Nagy: Valós fgv. és fgv. sorok 121. old.)

— A III-ban levő függvények, amelyek mindenütt folytonosak, de sehol sem diff.hatók, nyilván mind integrálhatók, hiszen folytonos függvények a véges zárt intervallumon integrálhatók

-32-

Konvergensek-e az alábbi sorozatok?

1307.• $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ **1308.**• $1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$

* * *

1309. Igazoljuk, hogy az

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{q}, & \text{ha } x=\frac{p}{q},\ p,q\in\mathbb{Z},\ (p,q)=q>0,\\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális}\end{cases}$$

függvény integrálható a $[0,1]$ intervallumon! (Riemann fgv.)

Megoldás. Az oszcillációs kritériumot fogjuk használni. Legyen $\varepsilon>0$, konstruálnunk kell egy olyan beosztását a $[0,1]$-nek, amelyre $o(f,B_n)<\varepsilon$.

Csak véges sok olyan („kis nevezőjű") pont van a $[0,1]$-en, amelyre $f(x)\geq\frac{\varepsilon}{2}$. Ezeket a pontokat fedjük le egy olyan intervallumrendszerrel, amelynek összhosszúsága kisebb, mint $\frac{\varepsilon}{2}$, és az intervallumok nem nyúlnak egymásra. Ezzel meghatároztuk a $[0,1]$ egy beosztását, képezzük a megfelelő oszcillációs összeget:

$$o(f,B_n)=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)(x_k-x_{k-1})=\sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2,$$

ahol $\sum_1$ jelöli a lefedő intervallumokon vett összeget, $\sum_2$ a többi tagot.

$\sum_1$ becsléséhez vegyük figyelembe, hogy bármely x-re $0\leq x\leq 1$,

$$\sum\nolimits_1(M_k-m_k)(x_k-x_{k-1})\leq 1\sum\nolimits_1(x_k-x_{k-1})<\frac{\varepsilon}{2}.$$

A $\sum_1$-ben szereplő intervallumokon kívül $0\leq f(x)\leq\frac{\varepsilon}{2}$, így

$$\sum\nolimits_2(M_k-m_k)(x_k-x_{k-1})\leq\frac{\varepsilon}{2}\sum\nolimits_2(x_k-x_{k-1})\leq\frac{\varepsilon}{2},$$

s ezzel a bizonyítás kész.

Integrálhatóak-e az alábbi függvények a $[0,1]$ intervallumon?

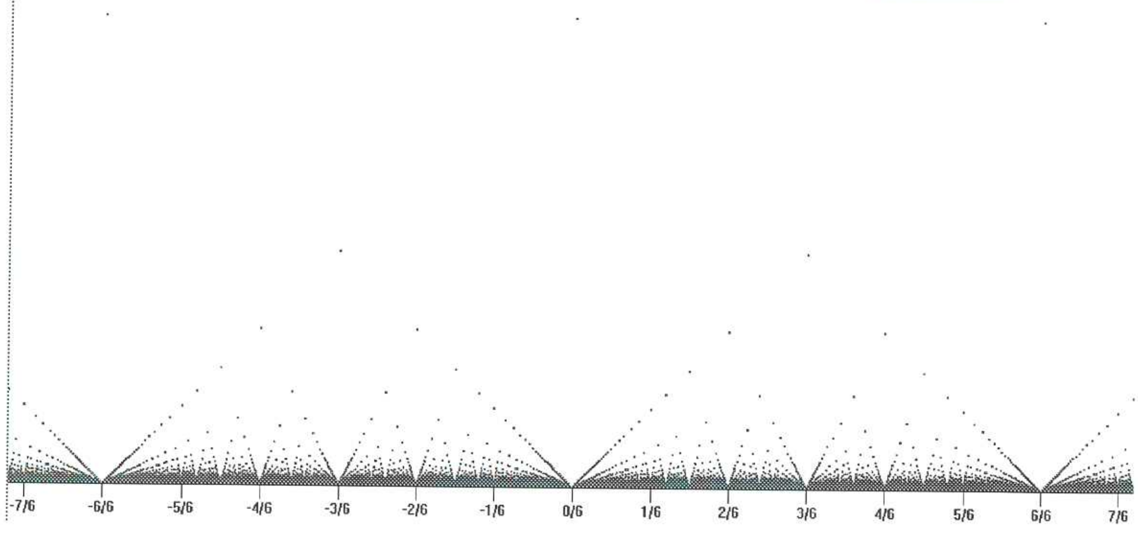
1310.° $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}, & \text{ha } x\text{-nek van pontosan } n\text{-jegyű véges tizedestört alakja},\\ 0, & \text{különben}\end{cases}$

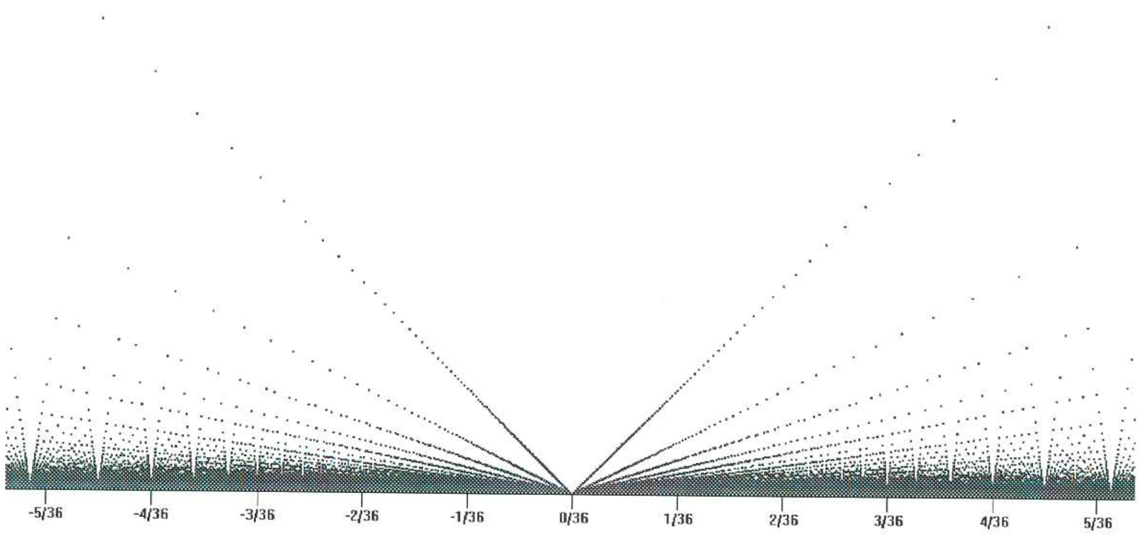
1311.• $f(x)=\begin{cases}1, & \text{ha } x=\frac{p}{q},\ p,q\in\mathbb{Z},\ (p,q)=1,\ q>0, \text{ és } q \text{ páros},\\ 2, & \text{ha } x=\frac{p}{q},\ p,q\in\mathbb{Z},\ (p,q)=1,\ q>0, \text{ és } q \text{ páratlan},\\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális}\end{cases}$

A Riemann-fgv grafikonja

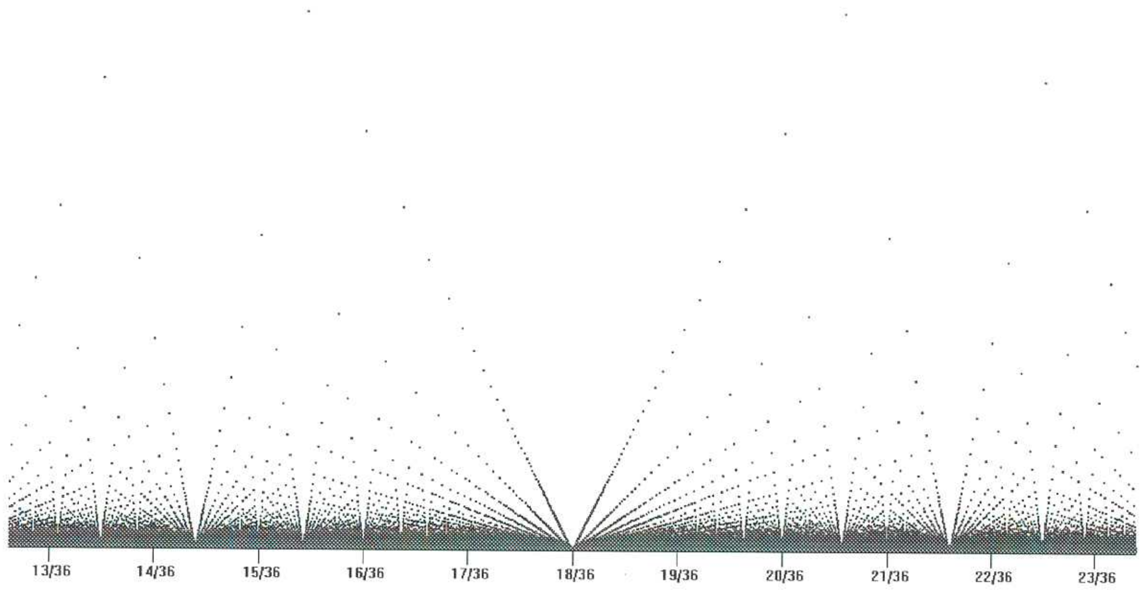
(MIHLAY GÉZA)

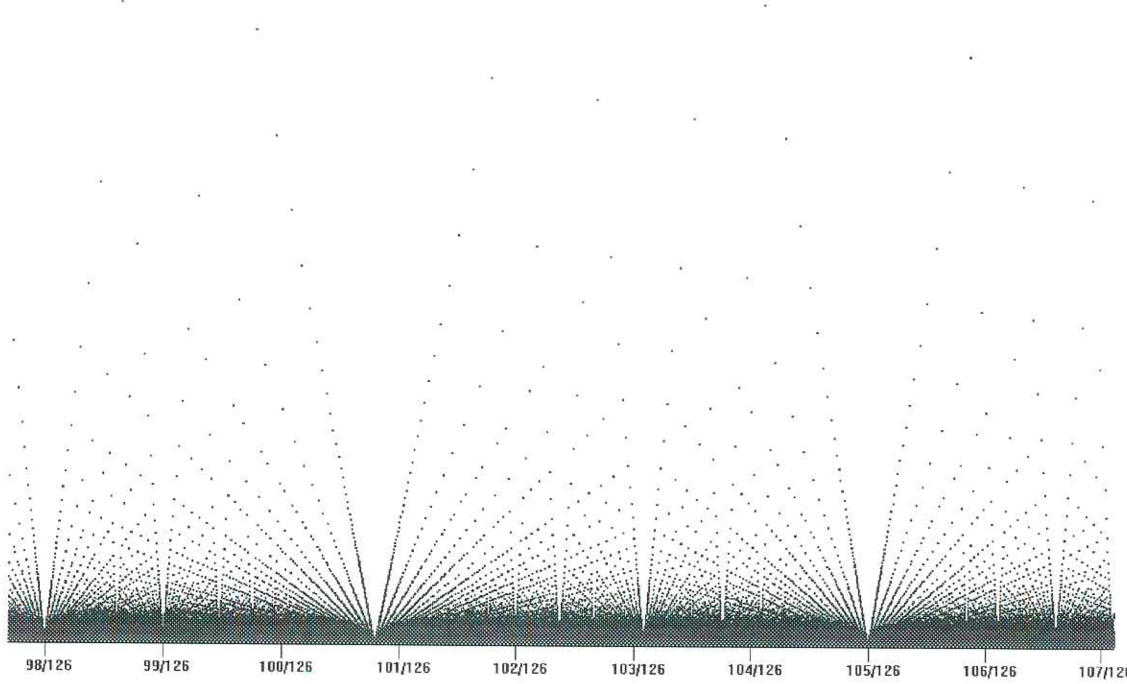
Ábra:





Pl.: $y = cx \Rightarrow \frac{1}{q} = c\frac{p}{q} \Rightarrow c = \frac{1}{p};\ q = kp+1, y = c(x-\frac{1}{6}), \frac{1}{q} = c(\frac{p}{q}-\frac{1}{6})\ldots$





~~*Most a "bomba":* Sierpiński-féle függvény~~

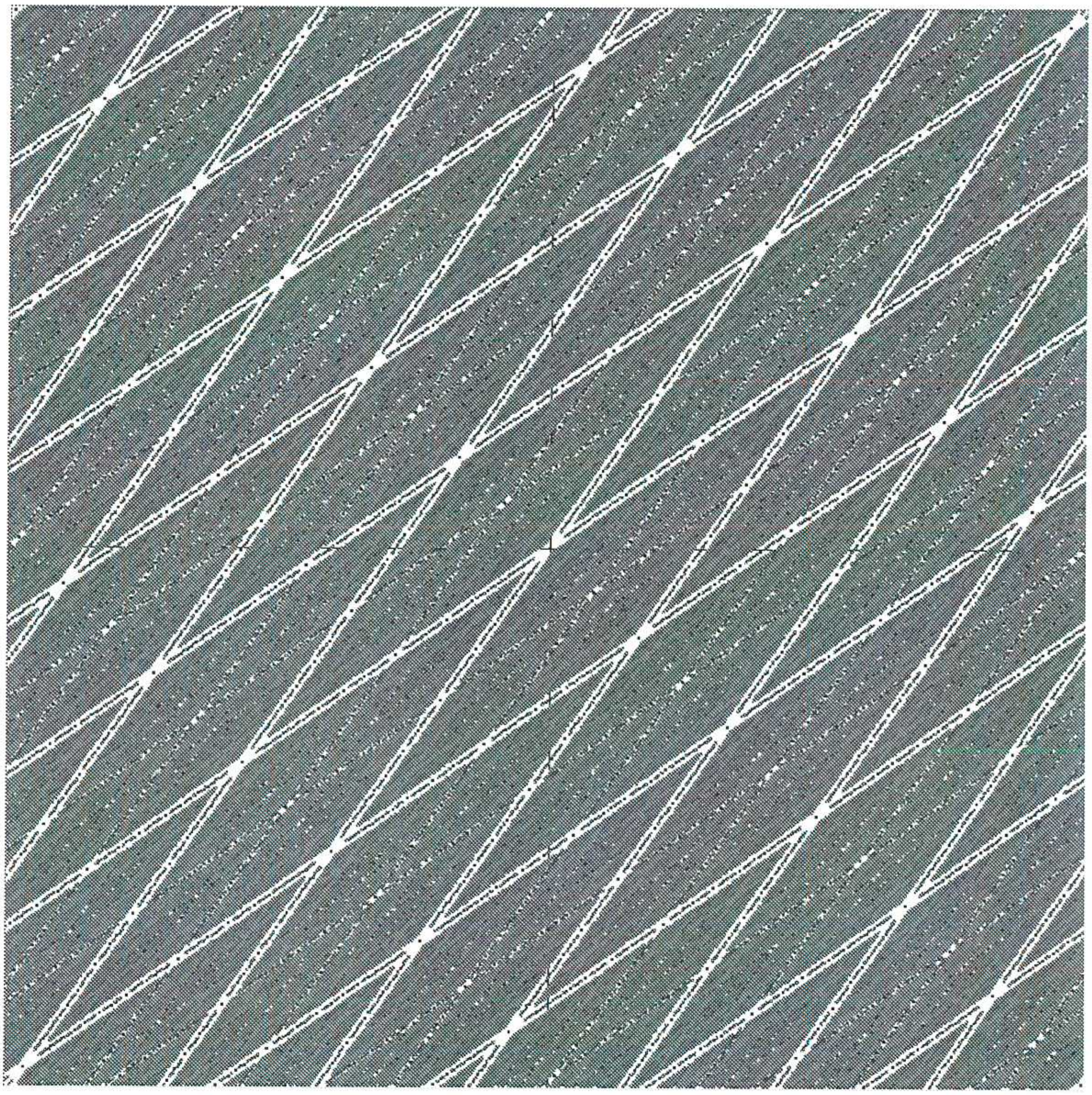
~~Grafikonja a síkon mindenütt **sűrű**.~~

~~*A definíció*~~*:*

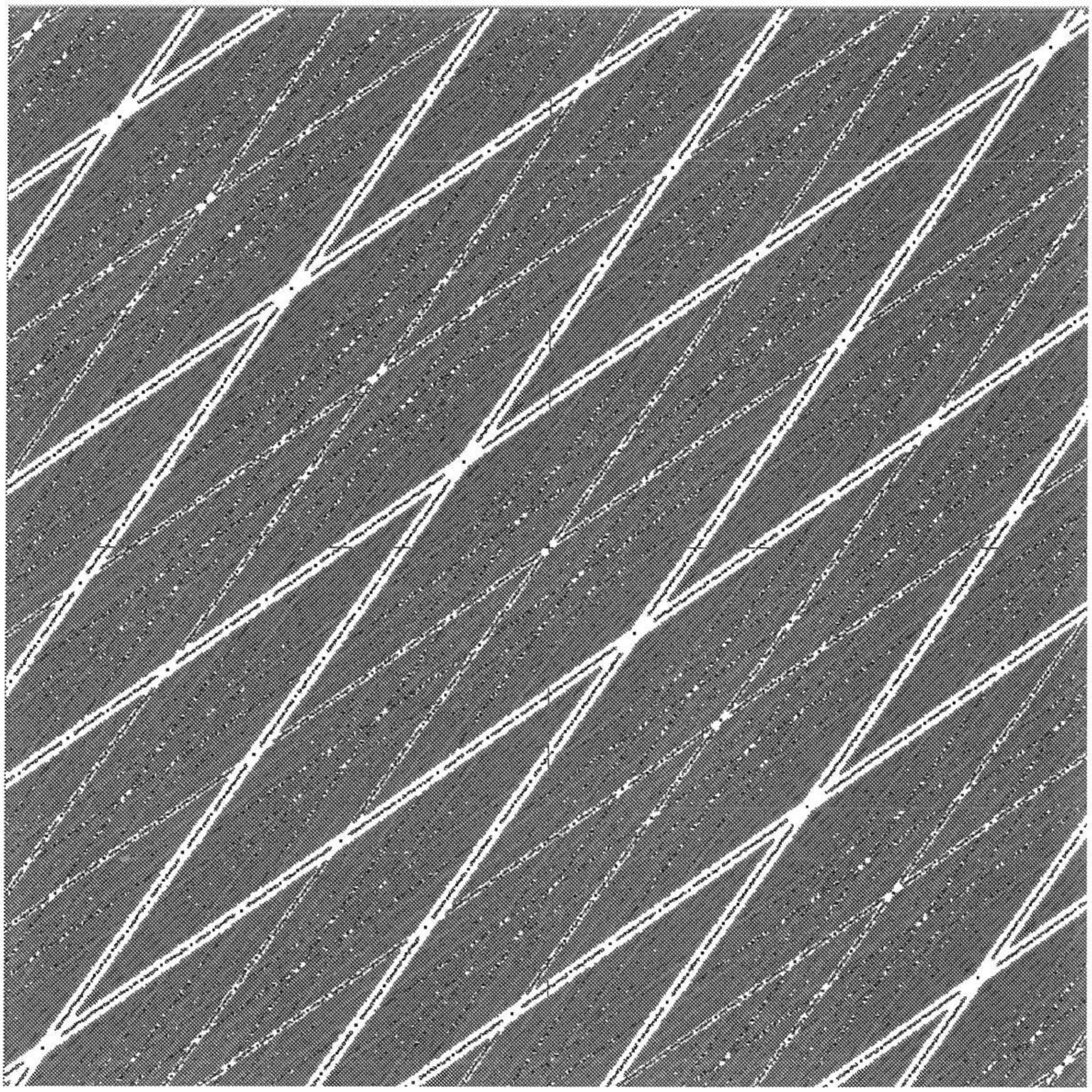
SIERPINSKI

MAKAY GÉZA

α) Ábra



Nevezők ≤ 200 (s és r nevezői)



Fraktál; hasonlóság; eltolás.

Nevezők ≤ 200

$y = \sqrt{2}x$

$x = a + \sqrt{2}b \Rightarrow y = b + \sqrt{2}a = \sqrt{2}(a + \sqrt{2}b) = a\sqrt{2} + 2b \Rightarrow b = 0$, a bármi

$a + \sqrt{2}b$ (b rögzített)

$a + \sqrt{2}b \to b + a\sqrt{2}$ (párhuzamos eltolás)

Egy sávban 12125 (Dr. Némethné Varga Éva)