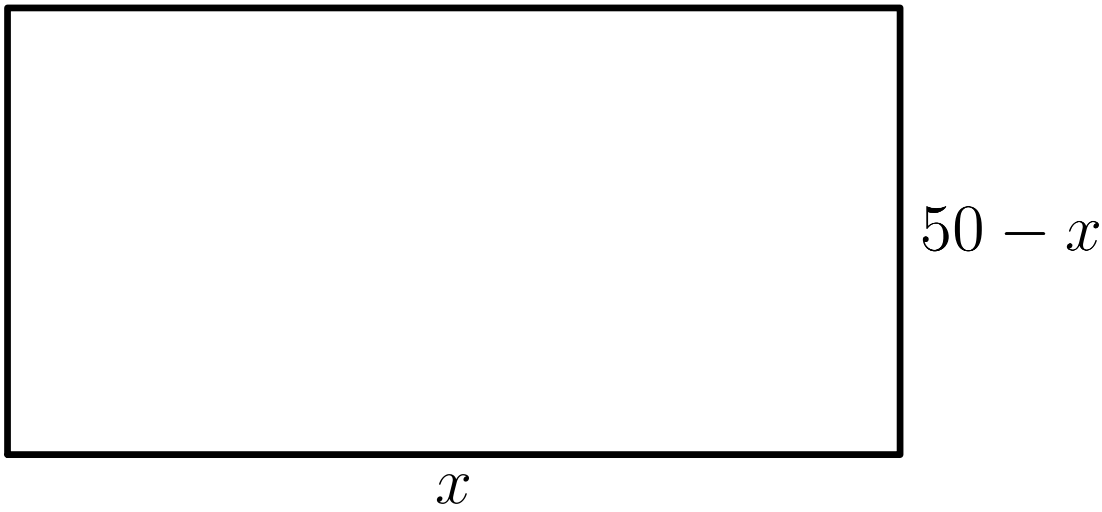
Egy kevés matematika hasznos alkalmazásokkal

Eötvös esték
2023. 11. 07.
19:00–20:00

Dr. Németh József
címzetes egyetemi tanár
SZTE TTIK Bolyai Intézet
Analízis Tanszék

1.a) **A 100 m kerületű téglalap alakú "kertek" közül melyiknek a területe maximális?**



$$T(x) = x(50 - x)$$

0) $T(x) = -x^2 + 50x$ másodfokú függvény. Maximuma a két zéróhely számtani közepe.

Megoldás: $x = 25$ (négyzet).

00) Tudjuk: $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, ha $a, b \geq 0$. És "$=$"$\Leftrightarrow$ ha $a = b$.

Így $x(50 - x) \leq \left(\frac{x+(50-x)}{2}\right)^2 = 25^2$.

A maximum akkor van, ha $x = 50 - x$, azaz $x = 25$.

Megjegyzés. Ekkor fel is veszi ezt a maximum értéket (ami most a 25^2).

000) Differenciálással: $T'(x) = -2x + 50 = 0 \Leftrightarrow x = 25$. (Van-e szélsőérték és maximum-e?)

Megjegyzés. Téglalap helyett négyszög (u.a., ld. később). **Izoperimetrikus probléma** (tetszőleges síkidom esetén a *kör, mindkét esetben*). Dido.

A monda szerint az izoperimetrikus probléma eredete a következő: *Dido, Tyrosz* királyának lánya volt. Nagybátyjához, *Acerbászhoz* ment feleségül, akit azonban mesés vagyona miatt hamarosan meggyilkoltak. Dido ekkor *Acerbász* kincseivel együtt Ciprusra menekült, majd innen tovább hajózott Afrika Szicíliához közeli partjaira. Elment a vidék uralkodójához és elmondta neki, hogy szeretne a tengerpart mentén egy földdarabot vásárolni, de nem nagyobbat, mint amekkorát egy marhabőrrel körül tud keríteni. Az uralkodó mosolyogva beleegyezett a szépséges királynő kérésébe, sőt nagylelkűen még meg is ajándékozta egy jókora marhabőrrel. Az okos *Dido* keskeny csíkokra vágta azt szét és a szeleteket összecsomózva olyan hosszú kötélhez jutott, amelyikkel jóval nagyobb (tengerbenyúló) földterületet lehetett elkeríteni a tengerparton, mint amekkorát az uralkodó elképzelt. Így alapította meg Karthágó virágzó városát, aminek később ő lett a királynője. MÁGLYA.

$3m^2 = 1500 \cdot 0,002$ (1500 méter 2 mm széles csíkok) $\Rightarrow$ (csomózás -300 m) 1200 méter a kerület

a) *Téglalap alakú* terület bekerítése:

optimális a négyzet $\Rightarrow a = 300$ m (egy oldal) $\Rightarrow 300^2 = 90000\text{m}^2 = \underline{\underline{9}}$ ha

b) *Kör alakú terület:*

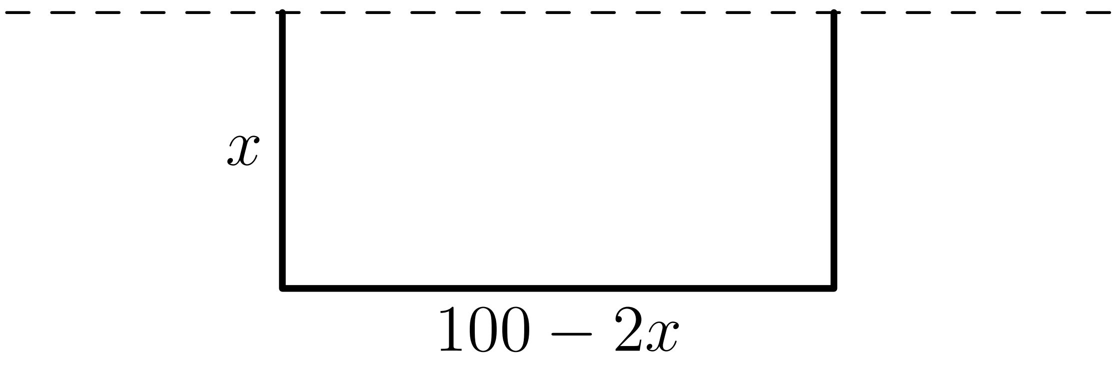
$$2r\pi = 1200 \Rightarrow r = \frac{600}{\pi} = 190,98\ldots\text{m}$$

A terület $r^2\pi = \pi \cdot 190,98^2 = 125638,57\text{m}^2 = \underline{\underline{12,56}}\ldots$ ha

Tehát (*Karthago*) $\approx$ 3,5 ha többlet ($\approx$7 millió Ft) (Pl. előző példánál 25^2 helyett $796,18$.)

Megjegyzés: Számos neves matematikus foglalkozott ezzel a témakörrel: Descartes (1596–1650); Jacob Bernoulli (1645–1705); Johann Bernoulli (1667–1748); Euler (1707–1783); Lagrange (1736–1813); *Jacob Steiner* (1796–1863); Dirichlet (1805–1859); Weierstrass (1815– 1892). (**Megj.**: *Archimedes* [i.e. 300 körül] ismerte a tételt. *EUKLIDESZ* téglalapra i.e. 300 körül.)

1.b) **Ugyanaz a feladat, mint az előző, csak a téglalap egyik oldala már adott (pl. fal), ahhoz nem kell kerítés.** (*Megj.: ekkor is négyzet??*) (Cows!)



$$T(x) = x(100-2x)$$

Nézzük csak a 00) típusú megoldást:

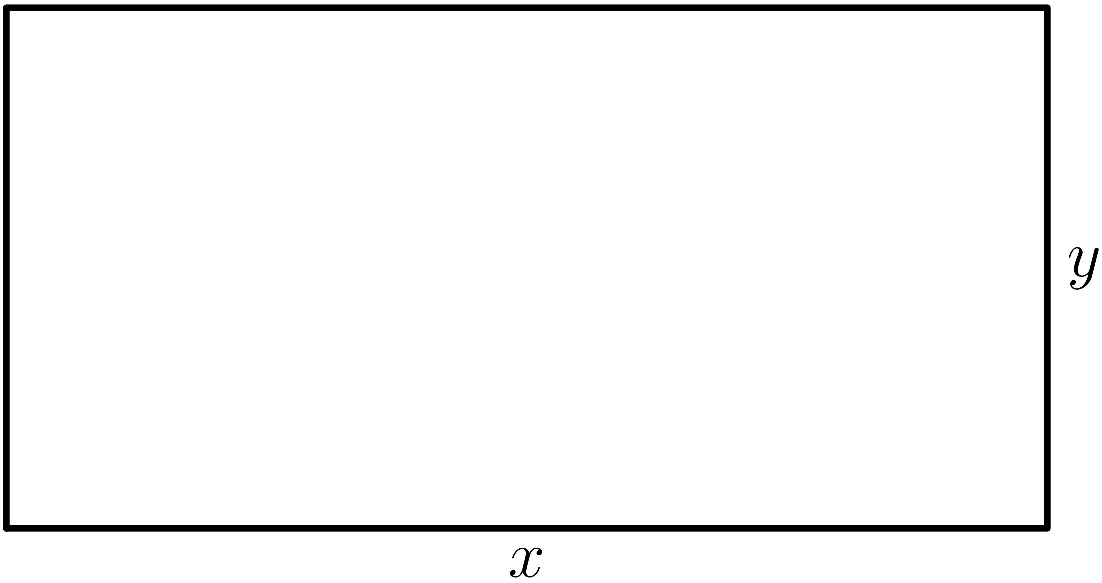
$$T(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x(100-2x).$$

$$2x(100-2x) \leq \left(\frac{2x + (100-2x)}{2} \right)^2 = 50^2.$$

$$\text{''} = \text{''} \Leftrightarrow 2x = 100 - 2x \Rightarrow x = 25.$$

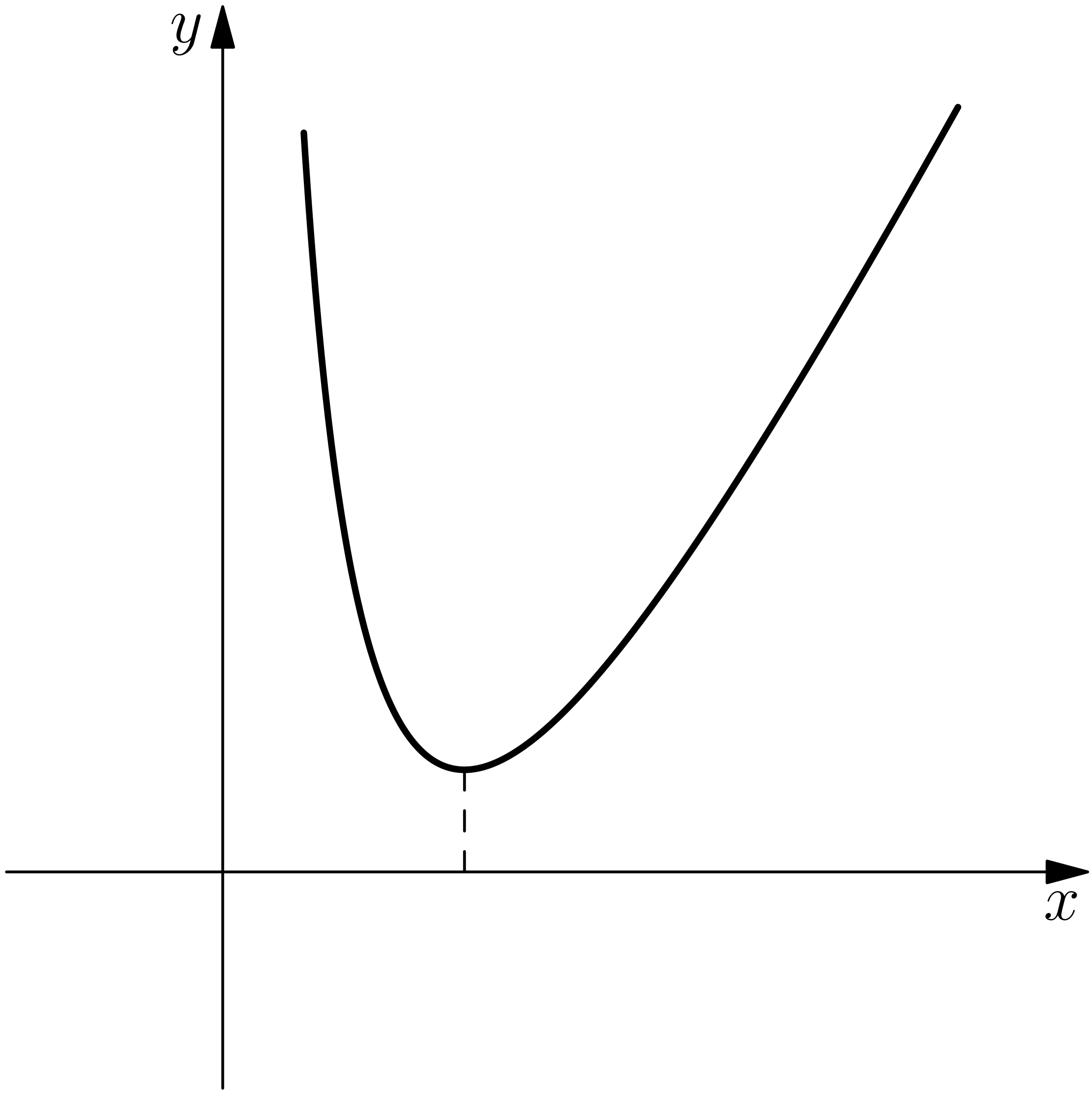
Tehát az oldalak: 25, ill. 50 m.

2. **Legyen a terület adott: 100 m^2. Melyik téglalap a minimális kerületű?** (Izoperimetrikus probléma fordítottja.) Itt is a kör a megoldás.



$$xy = 100 \Rightarrow y = \frac{100}{x} \Rightarrow k = \frac{200}{x} + 2x.$$

0) A ”függvénytani” elemi megoldás most nem megy.



00)

$$\frac{\frac{200}{x}+2x}{2} \geq \sqrt{\frac{200}{x}\cdot 2x} = \sqrt{400} = 20.$$

$$\text{”} = \text{”} \Leftrightarrow \frac{200}{x} = 2x \Leftrightarrow x = 10 \text{ (négyzet)}$$

000) Differenciálással: $k' = -\frac{200}{x^2} + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 10.$
(Van-e?)

3. **Egy bútorasztalos egy mahagóniültetvényről szerzi be a munkájához szükséges alapanyagot. Naponta 5 bútort készít el. A beszállítói egy konténernyi fát 5000 dollárért juttatnak el hozzá (függetlenül attól, hogy mennyi fa van a konténerben). A raktározási költség 10 dollár egységenként és naponta, ahol az egység az egy bútor elkészítéséhez szükséges alapanyag mennyisége. Mennyi faanyagot rendeljen egy-egy alkalommal, és milyen gyakran kérje a kiszállítást annak érdekében, hogy minimalizálni tudja a költségeket?** (*Igazi real-life.*)

Megoldás. Ha x naponként kér szállítást, akkor $5x$ mennyiségű alapanyagot kell rendelnie, hogy a rendelési ciklusban mindvégig elegendő anyaga legyen. Az *átlagosan* raktározott mennyiség hozzávetőleg a rendelt mennyiség fele, vagyis $5x/2$. Ezért egy-egy ciklusban a szállítási és raktározási költség együttesen:

egy ciklusbeli költség = szállítási költség + raktározási költség;

egy ciklusbeli költség =

$$
\begin{array}{rcccc}
= & 5000 + & \left(\frac{5x}{2}\right) \cdot & x \cdot & 10 \\
 & \text{száll.} & \text{átlagosan} & \text{rakt.} & \text{napi} \\
 & \text{költség} & \text{rakt.} & \text{napok} & \text{rakt. díj} \\
 & & \text{mennyiség} & \text{száma} &
\end{array}
$$

A $c(x)$ *átlagos napi költséget* úgy számítjuk ki, hogy a ciklusra eső költséget elosztjuk a ciklusban lévő napok számával, x-szel.

$$c(x) = \frac{5000}{x} + 25x, \quad x > 0.$$

Ld.: a 2. feladat ötlete.
Nyilván

$$\frac{5000}{x} + 25x \geq 2\sqrt{5000 \cdot 25} \text{ (konstans)}.$$

Így $c(x)$ minimális, ha "=" van, azaz

$$\frac{5000}{x} = 25x \Leftrightarrow 200 = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{200} \approx 14,14.$$

Tehát 14 naponként kell rendelnie.
Természetesen itt is célravezet a differenciálás. Real life.

Elrettentés:

3*. **Antonio has \$ 5.00 to spend on a lunch consisting of hamburgers (\$ 1.50 each) and French fries (\$ 1.00 per order). Antonio's satisfaction from eating x_1 hamburgers and x_2 orders of French fries is measured by a function $U(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$. How much of each type of food should he purchase to maximize his satisfaction (assume that fractional amounts of each food can be purchased)?**

Megoldás.

$$(*) \qquad 1,5x_1 + x_2 = 5$$

$$\sqrt{1,5x_1x_2} \le \frac{5}{2} \Leftrightarrow \sqrt{1,5}\sqrt{x_1x_2} \le \frac{5}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x_1x_2} \text{ maximális, ha } "=" \text{ van } \Leftrightarrow$$

$$1,5x_1 = x_2$$

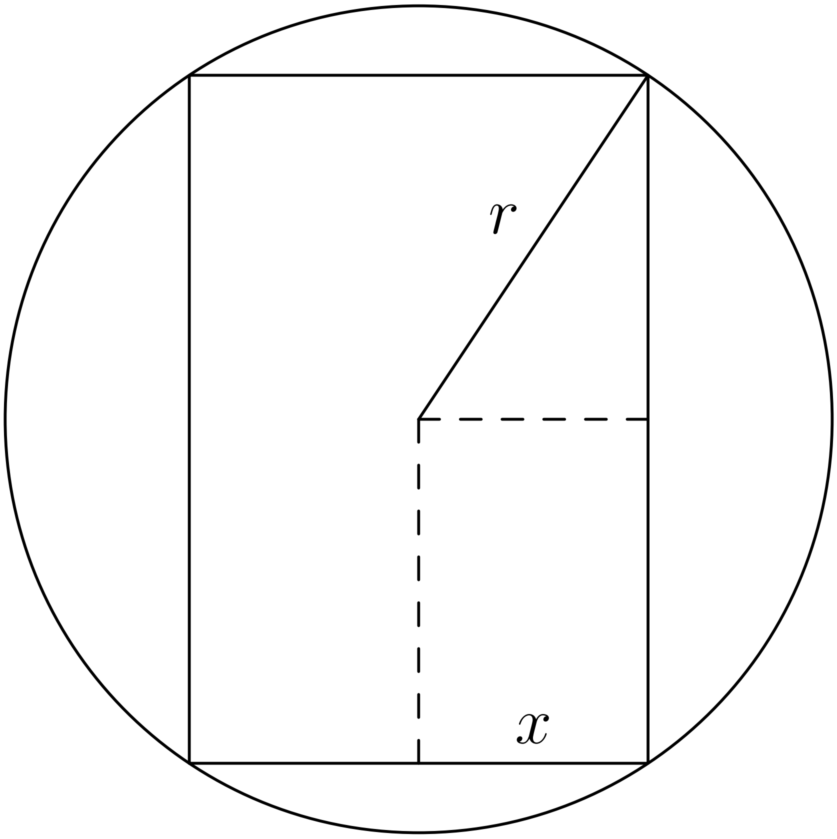
Figyelembe véve a $(*)$ egyenletet, kapjuk:

$$x_1 = \frac{5}{3}, \quad x_2 = \frac{5}{2},$$

azaz $\frac{5}{3}$ hamburger és $\frac{5}{2}$ sült krumpli az optimális adag.

Megj.: Mary, Jennifer. WKU – kérdés; válasz.

4.a) **Adott körbe írjunk maximális területű téglalapot (a "leesett" rész legyen minimális).** (*Medál*)



$$T(x) = 2x \cdot 2\sqrt{r^2 - x^2} = 4x\sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\tilde{T}(x) = x\sqrt{r^2 - x^2}.$$

0)

$$x\sqrt{r^2-x^2}=\sqrt{x^2(r^2-x^2)}\le\frac{x^2+r^2-x^2}{2}=$$
$$=\frac{r^2}{2}$$

$$"="\Leftrightarrow x^2=r^2-x^2\Leftrightarrow x=\frac{r}{\sqrt{2}}\ \text{(négyzet)}$$

00)

$$\tilde{T}^2=x^2(r^2-x^2)$$

$$f(t)=t(r^2-t)$$

$$t_0=\frac{r^2}{2}\Rightarrow x=\frac{r}{\sqrt{2}}$$

000) Differenciálás (de $\tilde{T}^2(x)$ a jobb: $-x^4+r^2x^2$).

4.b) **Adott gömbbe írjunk maximális térfogatú hengert.** (A "leesett" hulladék minimális legyen.) (*Kepler (1615); Jó bor (1610); "Barrel" probléma; medál*) (Newton 1643 differenciálás)

I. "**Megoldás.**": ld. előző példa eredménye (ábra ugyanaz; megoldás is ugyanaz?)

II.

$$V(x) = x^2\pi \cdot 2\sqrt{r^2 - x^2} = 2\pi x^2 \sqrt{r^2 - x^2}$$
$$\tilde{V}(x) = x^2\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{x^4(r^2 - x^2)}$$
$$\tilde{\tilde{V}}(x) = x^4(r^2 - x^2).$$

0) Függvénytan (nem parabola!!!)

00) Differenciálás ($\tilde{\tilde{V}}(x) = -x^6 + r^2x^4$; a derivált ötödfokú függvény, annak előjelváltását kell vizsgálni.)

000) Számtani-mértani közép???

$$\tilde{\tilde{V}}(x) = 4 \cdot \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x^2}{2}(r^2 - x^2)$$

Itt **3** elem összege konstans.

Kérdés (analógia):

$$(*) \qquad \frac{a+b+c}{3} \overset{?}{\geq} \sqrt[3]{abc}, \;\; a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0.$$

A $(*)$ **bizonyítása**:
Legyen a, b, c, d (≥ 0) először (4 elemre).

$$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2} \geq \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{cd}}{2} \geq$$
$$\geq \sqrt[4]{abcd}.$$

Most:

$$\underbrace{\frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4}} \geq \sqrt[4]{abc\frac{a+b+c}{3}}$$

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[4]{abc}\cdot\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{1/4} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{3/4} \geq \sqrt[4]{abc} \Rightarrow$$

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

Kell még az "=" feltétele (fontos!). Tegyük fel, hogy $a \neq b$. Ekkor

$$\frac{a+b+c}{3} = \frac{\frac{a+b}{2}+\frac{a+b}{2}+c}{3} \overset{!}{>} \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{ab}+c}{3} \geq$$
$$\geq \sqrt[3]{abc}.$$

Tehát "=" csak akkor lehet, ha minden elem ugyanaz. (*Cauchy-regresszív indukció*)

Vissza 4.b)-hez:

$$\overset{\approx}{V}(x) = 4\cdot\frac{x^2}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\cdot(r^2-x^2).$$

Így

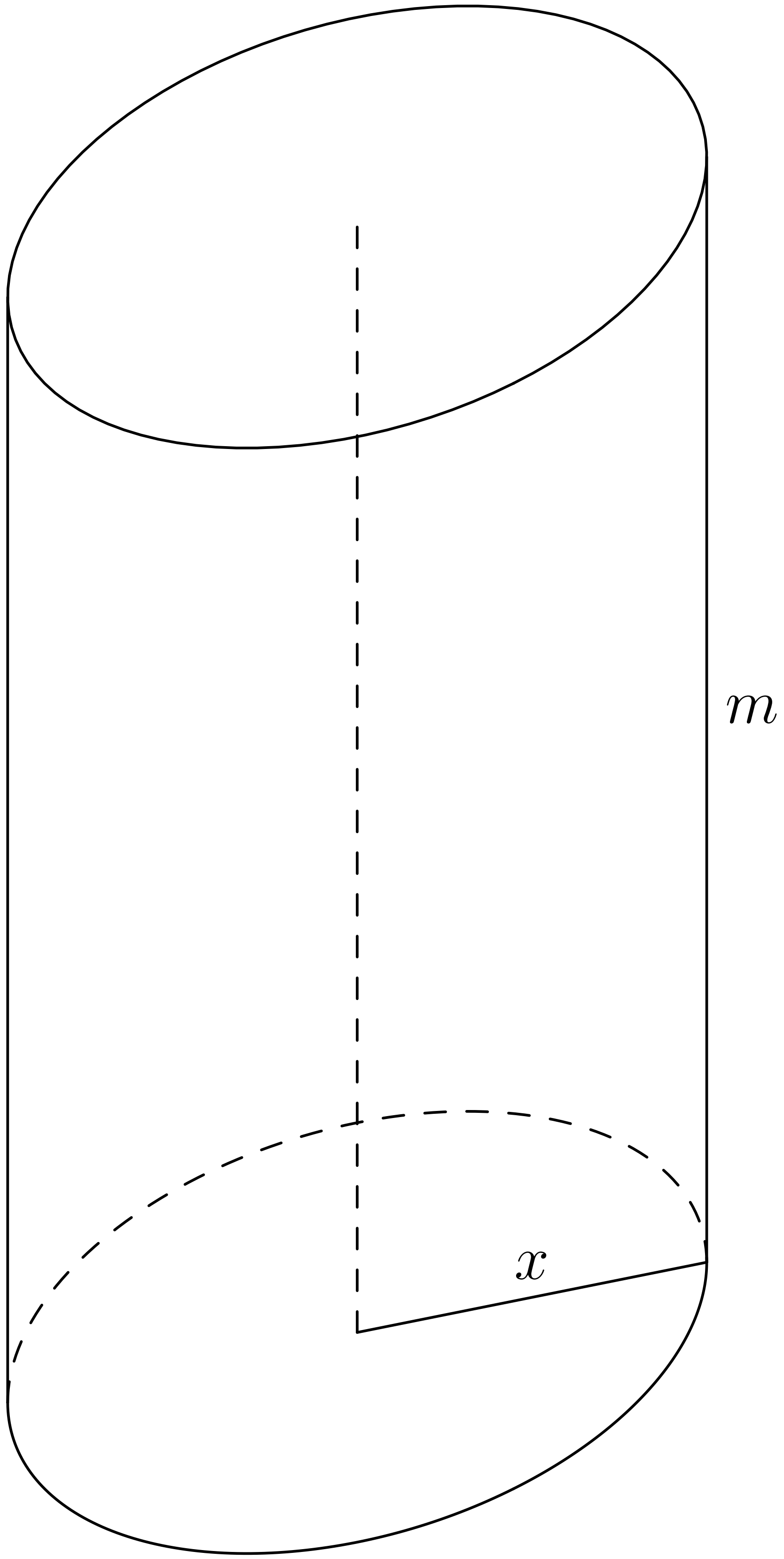
$$\frac{x^2}{2}\cdot\frac{x^2}{2}(r^2-x^2) \le \left(\frac{\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}+r^2-x^2}{3}\right)^3 = \left(\frac{r^2}{3}\right)^3.$$

Tehát a szorzat akkor maximális, ha "=" van, azaz

$$\frac{x^2}{2} = r^2 - x^2 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 = r^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{2}{3}}r$$

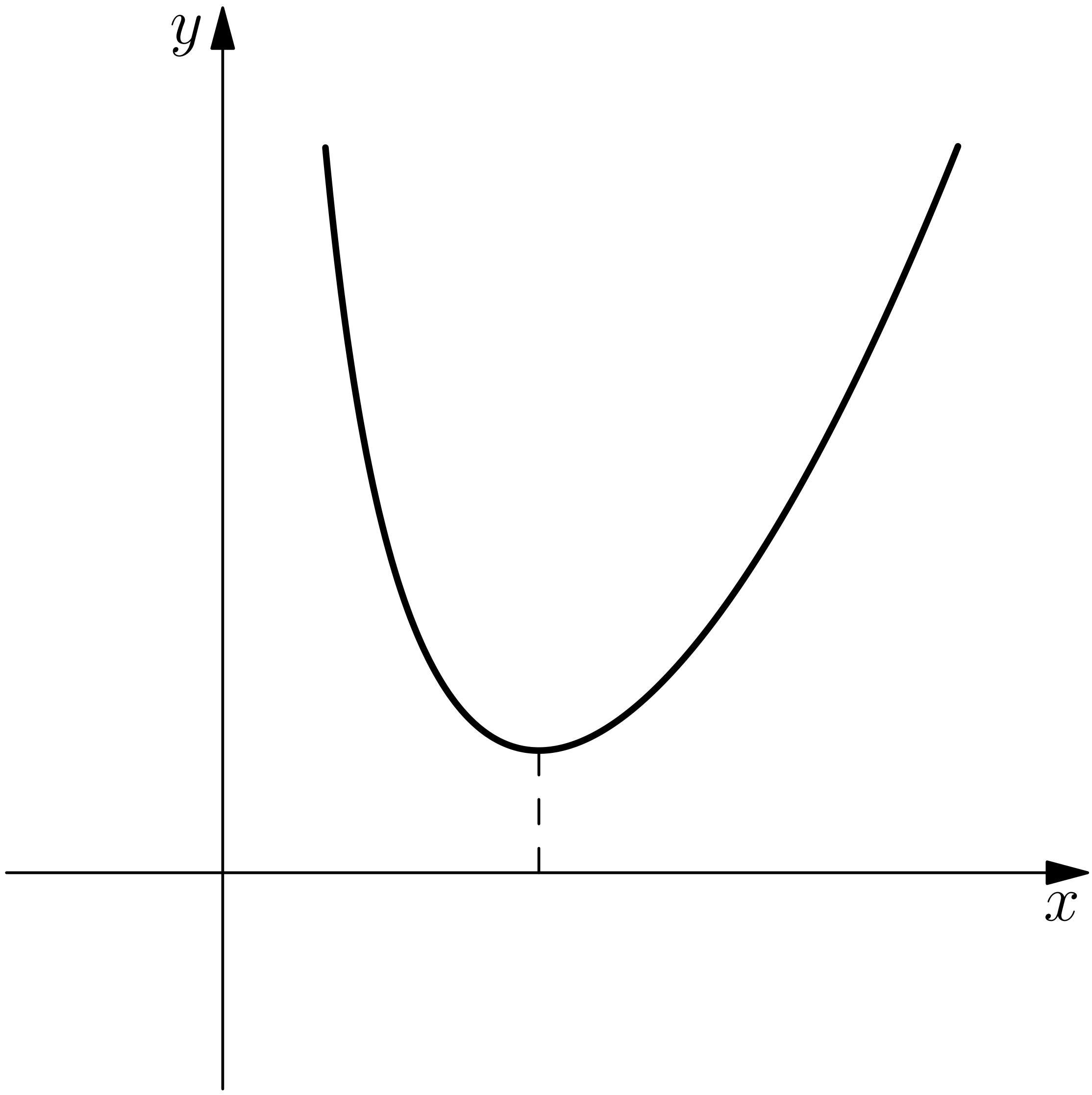
(tehát $\neq \frac{r}{\sqrt{2}}$, kicsit "ducibb" a megoldás, mert $\sqrt{\frac{2}{3}} > \frac{1}{\sqrt{2}}$.)

5. **Milyen méretű legyen az 1 dm^3 térfogatú henger alakú konzervdoboz, hogy a legkevesebb anyag legyen szükséges elkészítéséhez?** Real life minden évben.


m
x

$$x^2\pi m = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{x^2\pi}$$

$$F(x) = 2x^2\pi + 2x\pi \cdot m = 2x^2\pi + 2x\pi\frac{1}{x^2\pi} = 2x^2\pi + \frac{2}{x}$$



$$F(x) = 2x^2\pi + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \geq 3\sqrt[3]{2\pi}.$$

$$"=":\ 2x^2\pi = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} \qquad \textit{Jani bácsi}$$

$$2x = \frac{2}{\sqrt[3]{2\pi}};\ m = \frac{1}{(\sqrt[3]{(2\pi)^2})^{-1}\pi} = \frac{\sqrt[3]{(2\pi)^2}}{\pi} =$$
$$= \ldots = \frac{2}{\sqrt[3]{2\pi}}.$$

Tehát a **henger** átmérője = magasságával (egyenlőoldalú henger). (*Gomba; néhány pont*) No drink, no food. SZŐKE NŐ ÖCCSE.

Egy többváltozós probléma

6.a) **Milyen méretű legyen a téglatest formájúra csomagolt főzőmargarin ahhoz, hogy minimális csomagolóanyag legyen szükséges?** (Legyen 1 dm^3 a térfogat.)

$$xyz = 1$$

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= 2xy + 2yz + 2xz = \\ &= 2xy + (2y+2x)z = \\ &= 2xy + (2y+2x)\frac{1}{xy} = 2xy + \frac{2}{x} + \frac{2}{y}. \end{aligned}$$

Így a $g(x,y) = 2xy + \frac{2}{x} + \frac{2}{y}$ függvény minimuma kell. (Differenciálás középiskolában nem megy!!)

$$2xy + \frac{2}{x} + \frac{2}{y} \geq 3\sqrt[3]{8} = 6$$

Nyilván minimális az összeg, ha "=" van, azaz $2xy = \frac{2}{x} = \frac{2}{y} \Rightarrow x = y, 2x^2 = \frac{2}{x} \Rightarrow x = 1$. Tehát $x = 1, y = 1, z = 1$, azaz kocka alakú az optimális. (Előre sejtettük.)

Vissza a konzervdobozhoz

Kiinduló feltétel 1dm^3 térfogat (1 l.)

a) **Téglatest** (pl. margarin, gyümölcslevek (dobozos)). Itt az *optimális* a *kocka* (ld. előbb).
Mivel $a^3 = 1 \Rightarrow a = 1$ dm (a kocka éle: 1 dm)$\Rightarrow$
$F = 6 \cdot 1\text{dm}^2 = \underline{\underline{6\text{dm}^2}}$.

b) **Henger** (ld. előbb)
$V = r^2\pi \cdot m \Rightarrow m = \frac{1}{r^2\pi}$
$F = 2r^2\pi + 2r\pi \cdot \frac{1}{r^2\pi} = 2r^2\pi + \frac{2}{r} \cdots$ (ld. előbb)
$r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}},\ m = \frac{2}{\sqrt[3]{2\pi}}$
Így $F = 2 \cdot \frac{1}{(\sqrt[3]{2\pi})^2}\pi + 2 \cdot \sqrt[3]{2\pi} = 1,\dot{8}45157 + 3,690314 = 5,545471 \approx \underline{\underline{5,54\text{dm}^2}}$

c) **Gömb** (Steiner)

$V = \frac{4}{3}r^3\pi = 1 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} = 0,620646$

$F = 4r^2\pi = 4,8364 \approx \underline{\underline{4,83\text{dm}^2}}$ (Gömb alakú konzervdoboz!!!) TESCO

6.b) **Készítsünk téglatest alakú díszdobozt úgy, hogy az "alaplapja" 1000 Ft/dm^2, "fedőlapja" 5000 Ft/dm^2, a többi lap 2000 Ft/dm^2 költséggel készüljön. Milyen méret esetén lesz a minimális a költség (legyen a térfogata 8 dm^3).**

$$xyz = 8$$

$$\begin{aligned} F_k(x,y,z) &= xy \cdot 1 + xy \cdot 5 + 2yz \cdot 2 + 2xz \cdot 2 = \\ &= 6xy + 4yz + 4xz = 6xy + (4x+4y)z. \end{aligned}$$

Így

$$g_k(x,y) = 6xy + (4x+4y)\frac{8}{xy} = 6xy + \frac{32}{x} + \frac{32}{y}.$$

De $6xy + \frac{32}{x} + \frac{32}{y} \geq 3\sqrt[3]{6 \cdot 32^2}$.
A minimum akkor van, ha "=", azaz

$$6xy = \frac{32}{x} = \frac{32}{y}.$$

Tehát $x = y$ és $6x^3 = 32, x = \sqrt[3]{\frac{32}{6}} = \sqrt[3]{\frac{16}{3}} \approx 1,7471$. Tehát $x \approx 1,7471, y \approx 1,7471, z \approx 2,62$ lesz az optimális méret (négyzet alapú; magassága nagyobb, mint az alap éle).

6.c) **A posta belföldi forgalomban csak olyan küldeményeket vesz fel, amelyek hosszának és körméretének összege $\leq 2m$. Milyen méretű legyen egy téglatest alakú csomag, amely a legnagyobb térfogatú?**

$$x + 2y + 2z = 2$$

$$V(x, y, z) = xyz = xy\frac{2 - x - 2y}{2}$$

$$\tilde{V}(x, y) = xy(2 - x - 2y) = \frac{1}{2} \cdot x2y(2 - x - 2y) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^3$$

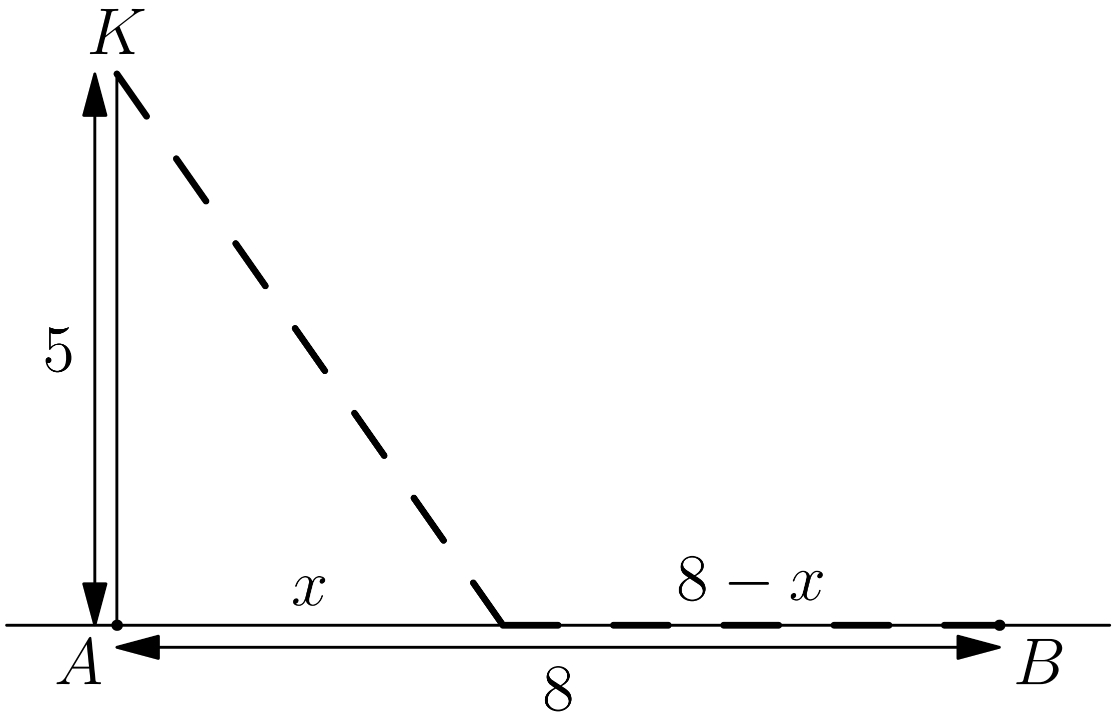
$$\text{"} = \text{"} \Leftrightarrow x = 2y = 2 - x - 2y$$

$$x = \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{1}{3}$$

$$z = \frac{1}{3}$$

7. **Egy olajkút a parttól 5 km-re a tengerben működik. A parton a hozzá legközelebbi** A **ponttól egy 8 km-re fekvő** B **pontban levő finomítóba kell szállítani az olajat. A víz alatti csővezeték ára 100.000 Ft/km, a föld alattié 75.000 Ft/km. Milyen utat építsenek ki, hogy a költség minimális legyen?**



$$f(x) = 100 \cdot \sqrt{x^2 + 25} + 75(8 - x)$$

I. Megoldás: csak differenciálással?

$$f'(x) = 100 \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 25}} - 75 = 0 \Leftrightarrow$$

$$100x = 75\sqrt{x^2+25}$$

$$\vdots$$

$$x = \frac{15}{\sqrt{7}} \approx 5,67 \text{ km.}$$

II. Megoldás. H.F. (diff. nélkül) (XVI. sz.; négyzettábla; **Kalmár L.**)

$$(u+v)^2 - (u-v)^2 = 4uv$$

$$(u+v)^2 = (u-v)^2 + 4uv;\ v = \frac{1}{4u}$$

$$\left(u + \frac{1}{4u}\right)^2 = \left(u - \frac{1}{4u}\right)^2 + 1$$

$$\tilde{f}(x) = 100\sqrt{x^2+25} - 75x \text{ minimuma kell}$$

$$x = 5\left(u - \frac{1}{4u}\right) \Rightarrow \sqrt{x^2+25} =$$

$$= \sqrt{25 + 25\left(u - \frac{1}{4u}\right)^2} =$$

$$= 5 \cdot \sqrt{1 + \left(u - \frac{1}{4u}\right)^2} = 5 \cdot \left(u + \frac{1}{4u}\right).$$

Így

$$\tilde{f}(x) = g(u) = 100 \cdot 5 \cdot \left(u + \frac{1}{4u}\right) -$$

$$- 75 \cdot 5 \left(u - \frac{1}{4u}\right) =$$

$$= 125u + \frac{875}{4} \cdot \frac{1}{u} \text{ (\textbf{szorzat konstans})}$$

$$\min g(u) : 125u = \frac{875}{4} \cdot \frac{1}{u} \Rightarrow u^2 = \frac{175}{100} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = \frac{5\sqrt{7}}{10} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\min \tilde{f}(x) : 5 \left(\frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{1}{4 \cdot \frac{\sqrt{7}}{2}} \right) = 5 \left(\frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{7}} \right) =$$

$$= 5 \cdot \frac{14 - 2}{4\sqrt{7}} = 5 \cdot \frac{12}{4\sqrt{7}} = \frac{15}{\sqrt{7}} \approx 5,67 \text{ km.}$$

VÉGTELEN ÖSSZEGEK (SOROK)

α) CSOKI

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = ?$$

$\beta)$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}+\cdots=? \quad \text{(TORTA)}$$

Vagy:

$$\left.\begin{array}{r}\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots=A/\cdot\frac{1}{3}\\[2ex] \frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots=\frac{A}{3}\quad\end{array}\right\}\Rightarrow A=\frac{1}{2}$$

$\gamma)$ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=?$

$\delta)$ $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}=?$

Ad π) (Madhava; Nilakhanta; Leibniz)
Pl.:
100 tag $\to 3,1\ldots$
1000 tag $\to 3,14\ldots$
10^6 tag $\to 3,14159\ldots$
10^9 tag $\to 3,14159265\ldots$
10^{24} tag $\to 3,141592653589793238462 64\ldots$
$\pi=4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right)$. **SORREND!!!**

Lassú, de szép. (Tandori)

i.e.	2000 (B)	$3,\mathbf{12}5$
	(E)	$3,\mathbf{16}$
	250 (A)	$3,\mathbf{141}8$
i.sz.	263 :	5 tizedesjegy
	480 :	7
	1429 :	14
	1610 :	35
	1719 :	112
	1847 :	152
	1874 :	527
	1973 :	1 001 250
	2002 :	1 240 000 000 000
	2010 :	5 000 000 000 000
	2012 :	1 241 100 000 000 000 000
	2013 :	8 000 000 000 000 000 000 000 000

David Bailey, Peter Borwein és Simon Plouffe (1996):

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i}\left(\frac{4}{8\,i+1} - \frac{2}{8\,i+4} - \frac{1}{8\,i+5} - \frac{1}{8\,i+6}\right).$$

Ez utóbbi módszerről részletesen olvashatunk: [14]-ben (Math. Gazette, Vol. 83, Nr. 498, 1999).

A HASZNOSSÁG

$\pi = 3,141592653\ldots$

Pl. 2013 : $\pi = 3,14\ldots$ ($8 \cdot 10^{24}$ jegy; Cal. Santa Clara Univ.: 26 gép 37 napig. Hogyan? Miért kell?)

Pl. Mars szonda 103.522 km eltérés, ha $\pi = 3,14$ vagy $\pi = 3,14\cdots$ (31 jegy). Ez a Hold–Föld táv. harmada.

EXTRA PROBLÉMA: Anna és Béla együtt járnak, de párosuk elég furcsa. Béla nehéz természetű. Amikor Anna szereti Bélát, akkor Béla kezdi kevésbé szeretni Annát. Ha Anna utálja Bélát, akkor viszont Béla egyre jobban kezdi szeretni Annát. Anna normális: ha Béla szereti Annát, akkor Anna is egyre barátságosabban néz Bélára, de kezd barátságtalanabb lenni, amikor Béla nem szereti őt. Hogyan lehetne leírni viszonyuk változását?

Tegyük fel, hogy a $t = 0$ pillanatban találkoztak. A $t \geq 0$-n értelmezett $a = a(t), b = b(t)$ függvények fejezik ki Anna, ill. Béla szeretetét Béla ill. Anna iránt.

Az a függvény változásának a sebessége legyen arányos b-vel:

$$a'(t) = Ab(t),$$

és a b függvény változásának sebessége arányos a-val:

$$b'(t) = -Ba(t).$$

Az egyenletrendszerből $a''(t) = b'(t) = -a(t)$, azaz $a''(t) + a(t) = 0$. Ez egy másodrendű, lineáris egyenlet.

$$\vdots$$

$$a(t) = C\cos t + D\sin t, \quad C, D \text{ állandó}$$

$$b(t) = E\cos t + F\sin t, \quad E, F \text{ állandó}$$

$$a'(t) = -C\sin t + D\cos t = b(t) = E\cos t + F\sin t$$

$$a(t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ és } b(t) = \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$a(t) = e^t + 2te^t = (1 + 2t)e^t,$$

$$b(t) = e^t - 2te^t = (1 - 2t)e^t.$$

$t \geq 0, a(t) \to \infty$ monoton nőve és $b(t) \to -\infty$ monoton fogyva, ha $t \to \infty$. Mint látható, itt semmi remény.