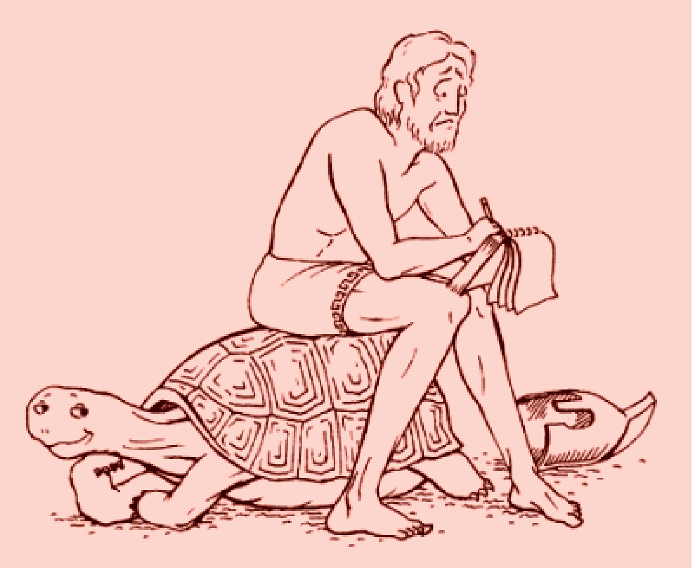
Hogyan adjunk össze végtelen sok számot?

Németh Zoltán, SZTE Bolyai Intézet
www.math.u-szeged.hu/~nemeth

2006, 2007.

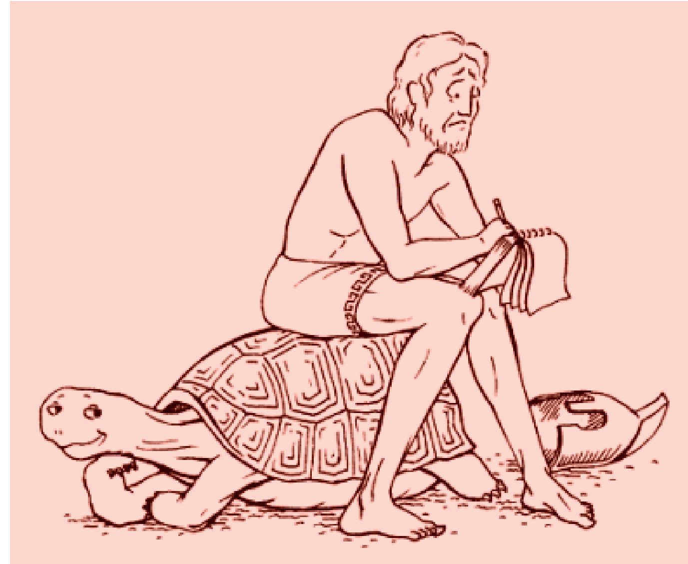
Akhilleusz, a görög hős és a teknősbéka versenyt futnak. Akhilleusz tízszer olyan gyorsan fut, ezért lovagiasságból ad 1 sztadion előnyt.

Utoléri-e Akhilleusz a teknősbékát, és ha igen, hol?



Akhilleusz, a görög hős és a teknősbéka versenyt futnak. Akhilleusz tízszer olyan gyorsan fut, ezért lovagiasságból ad 1 sztadion előnyt.

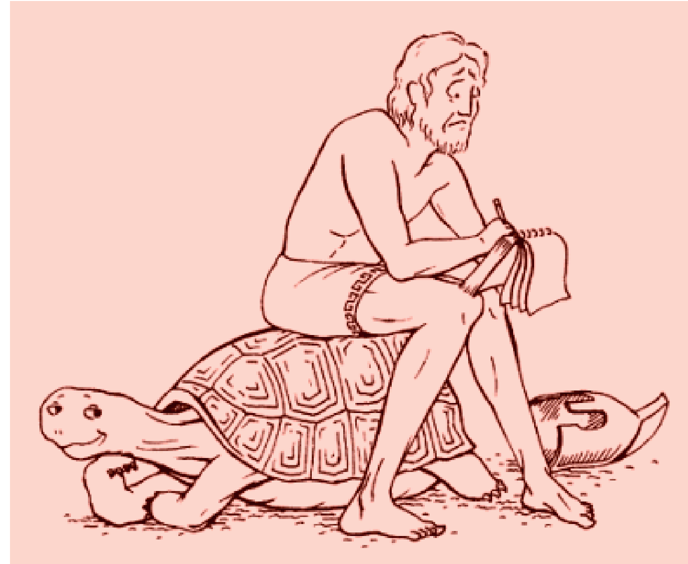
Utoléri-e Akhilleusz a teknősbékát, és ha igen, hol?



Utoléri, hiszen ha Akhilleusz megtesz mondjuk 2 sztadion utat, ezalatt a teknősbéka az előnyével együtt is csak 1,2 sztadion messzire jut, tehát lemaradt.

Akhilleusz, a görög hős és a teknősbéka versenyt futnak. Akhilleusz tízszer olyan gyorsan fut, ezért lovagiasságból ad 1 sztadion előnyt.

Utoléri-e Akhilleusz a teknősbékát, és ha igen, hol?



Utoléri, hiszen ha Akhilleusz megtesz mondjuk 2 sztadion utat, ezalatt a teknősbéka az előnyével együtt is csak 1,2 sztadion messzire jut, tehát lemaradt.

Ahhoz, hogy a teknőst utolérje, Akhilleusznak

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\cdots+\frac{1}{10^k}+\cdots$$

sztadion utat kell megtennie.

Gombóc Artúr nagyon szereti a csokoládét. Kedvenc csokija csomagjában van egy szelvény, és 10 szelvényért egy újabb csokit lehet kapni a boltban (persze becsomagolva).

Mennyit ér valójában egy csomag csoki?

Gombóc Artúr nagyon szereti a csokoládét. Kedvenc csokija csomagjában van egy szelvény, és 10 szelvényért egy újabb csokit lehet kapni a boltban (persze becsomagolva).

Mennyit ér valójában egy csomag csoki?

Világos, hogy egy tábla csokit és egy szelvényt.
De ha 10 szelvény = 1 csomag, akkor 1 szelvény = 0,1 csomag, és a tized csomaghoz is tartozik egy tized szelvény . . .

Tehát a becsomagolt csoki mindösszesen

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\cdots+\frac{1}{10^k}+\cdots$$

tábla (meztelen) csokit ér.

Másrészt, ha 10 szelvény = 1 csomag, akkor

10 szelvény = 1 tábla csoki + 1 szelvény, azaz

9 szelvény = 1 tábla csoki,

1 szelvény = $\frac{1}{9}$ tábla csoki,

Másrészt, ha 10 szelvény = 1 csomag, akkor

10 szelvény = 1 tábla csoki + 1 szelvény, azaz

9 szelvény = 1 tábla csoki,

1 szelvény = $\frac{1}{9}$ tábla csoki,

tehát

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\cdots+\frac{1}{10^k}+\cdots=1+\frac{1}{9}$$

Másrészt, ha 10 szelvény = 1 csomag, akkor

10 szelvény = 1 tábla csoki + 1 szelvény, azaz

9 szelvény = 1 tábla csoki,

1 szelvény = $\frac{1}{9}$ tábla csoki,

tehát

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\cdots+\frac{1}{10^k}+\cdots=1+\frac{1}{9}$$

Azaz a becsomagolt csoki $1\frac{1}{9}$ tábla csokit ér; Akhilleusz $1\frac{1}{9}$ sztadion után éri utol a teknőst; és úgy adhatunk össze végtelen sok számot, hogy az elsőt 1, a másodikat 0,1, a harmadikat 0,01másodperc alatt adjuk a többihez és így tovább – ekkor $1\frac{1}{9}$ másodperc alatt végzünk. ☺

Nézzük általánosan: Ha

$$1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots=S\,,$$

$$x+x^2+x^3+x^4+\cdots=x\cdot S\,,$$

$$1+0+0\ \ +0\ \ +0\ \ +\cdots=(1-x)\cdot S\,,$$

azaz

$$1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots=\frac{1}{1-x}\,.$$

Nézzük általánosan: Ha

$$1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots=S,$$

$$x+x^2+x^3+x^4+\cdots=x\cdot S,$$

$$1+0+0\quad+0\quad+0\quad+\cdots=(1-x)\cdot S,$$

azaz

$$1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots=\frac{1}{1-x}.$$

Ha $x=\frac{1}{10}$, akkor

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\cdots+\frac{1}{10^k}+\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=1+\frac{1}{9}$$ ☺

$$1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots=\frac{1}{1-x}$$

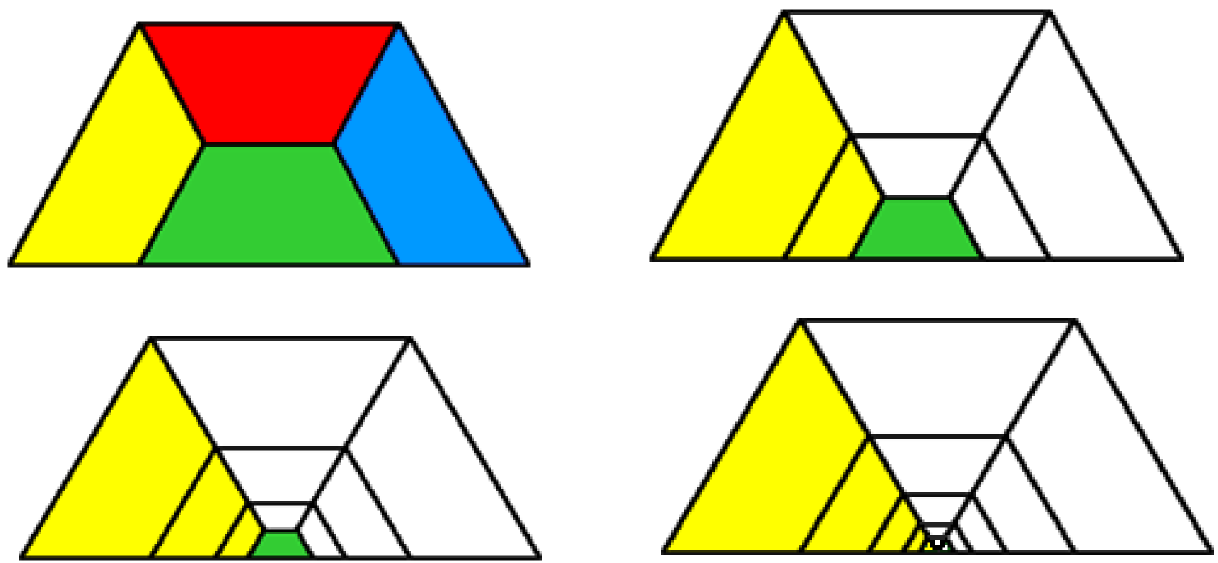
Ha $x=\frac{1}{4}$, akkor

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{4^k}+\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=1+\frac{1}{3}$$

$$1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots=\frac{1}{1-x}$$

Ha $x=\frac{1}{4}$, akkor

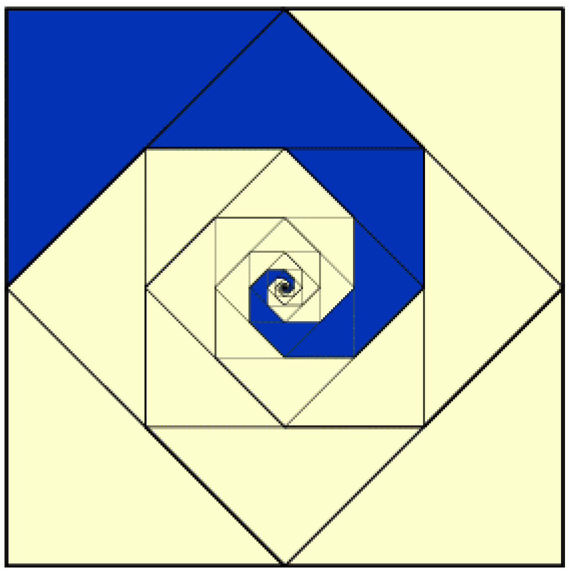
$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{4^k}+\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=1+\frac{1}{3}$$

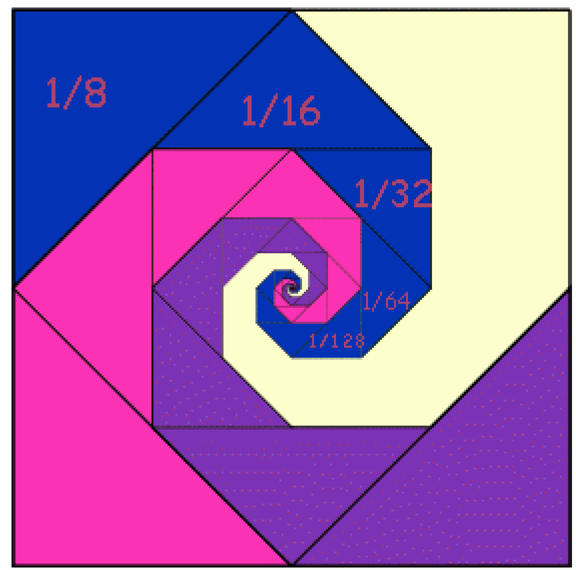


$$
\begin{aligned}
\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\cdots &= \frac{1}{8}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\right)\\
&= \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\cdots=\frac{1}{8}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{4}$$





$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \frac{1}{1 - x}$$

$$1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots=\frac{1}{1-x}$$

Ha $x=-1$, akkor

$$-1+1-1+1-1+1-+\cdots=\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}$$

Egész számok összege tört? ☹

$$1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots=\frac{1}{1-x}$$

Ha $x=-1$, akkor

$$-1+1-1+1-1+1-+\cdots=\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}$$

Egész számok összege tört? ☹

Ha $x=2$, akkor

$$1+2+4+8+16+\cdots=\frac{1}{1-2}=-1$$

Pozitív számok összege negatív? ☹

Ideje pontos definíciót adni. Az

$$a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_k+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

formális összegnek (végtelen sornak, numerikus sornak) képezzük a részletösszegeit a következő módon:

$$s_1=a_1, \quad s_2=a_1+a_2, \quad s_3=a_1+a_2+a_3,$$

$$s_4=a_1+a_2+a_3+a_4, \quad \ldots \quad s_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n, \quad \ldots$$

Ideje pontos definíciót adni. Az

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_k + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

formális összegnek (végtelen sornak, numerikus sornak) képezzük a részletösszegeit a következő módon:

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$

$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \quad \ldots \quad s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n, \quad \ldots$$

Ha van olyan s szám, amit a részletösszegek “minden határon túl” megközelítenek, azt mondjuk, hogy a sor konvergens és összege s.

Ha nincs ilyen szám, az összeget nem értelmezzük, a sor divergens.

Számoljuk ki az

$$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^k+\cdots$$

sor részletösszegeit:

$$s_n=1+x+x^2+\cdots+x^n=\frac{1-x^n}{1-x} \qquad (x\neq 1)$$

Számoljuk ki az

$$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^k+\cdots$$

sor részletösszegeit:

$$s_n=1+x+x^2+\cdots+x^n=\frac{1-x^n}{1-x} \qquad (x\neq 1)$$

Legyen |x| < 1. Ha n elég nagy,

$$x^n\approx 0, \quad s_n\approx\frac{1}{1-x}, \quad s_n\to\frac{1}{1-x}$$

Számoljuk ki az

$$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^k+\cdots$$

sor részletösszegeit:

$$s_n=1+x+x^2+\cdots+x^n=\frac{1-x^n}{1-x} \qquad (x\neq 1)$$

Legyen |x| < 1. Ha n elég nagy,

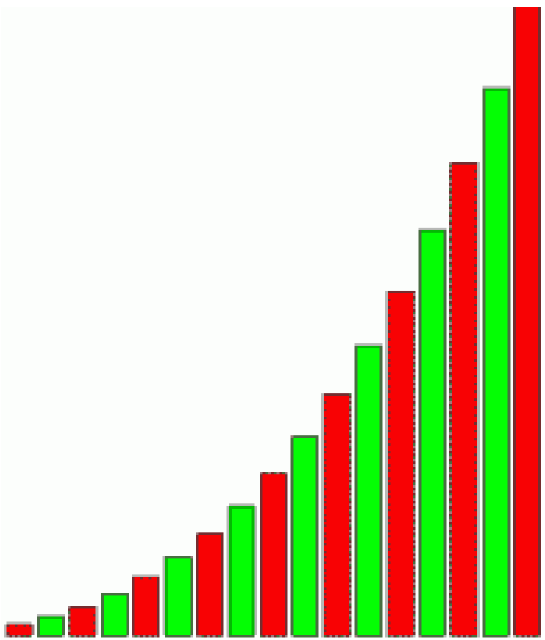
$$x^n\approx 0, \qquad s_n\approx\frac{1}{1-x}, \qquad s_n\to\frac{1}{1-x}$$

Tehát fenti sorunk összege $\frac{1}{1-x}$.

Ha $|x|>1$, a részletösszegek minden határon túl növekszenek (abszolút értékben); ha $x=-1$, a 0 és az 1 között ugrálnak; a sor összege definíciónk szerint ekkor nem értelmezett.

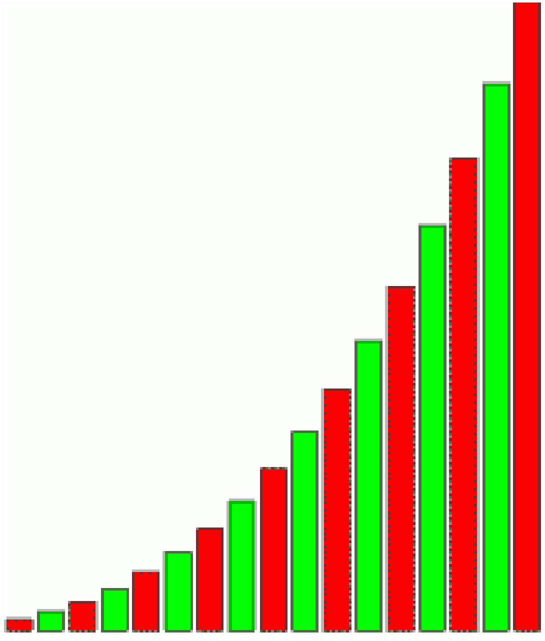
Ha a sor tagjai mind pozitívak, a részletösszegek monoton növekszenek. A helyzet egyszerű:

Ha a részletösszegek minden határon túl növekszenek, a sor divergens.

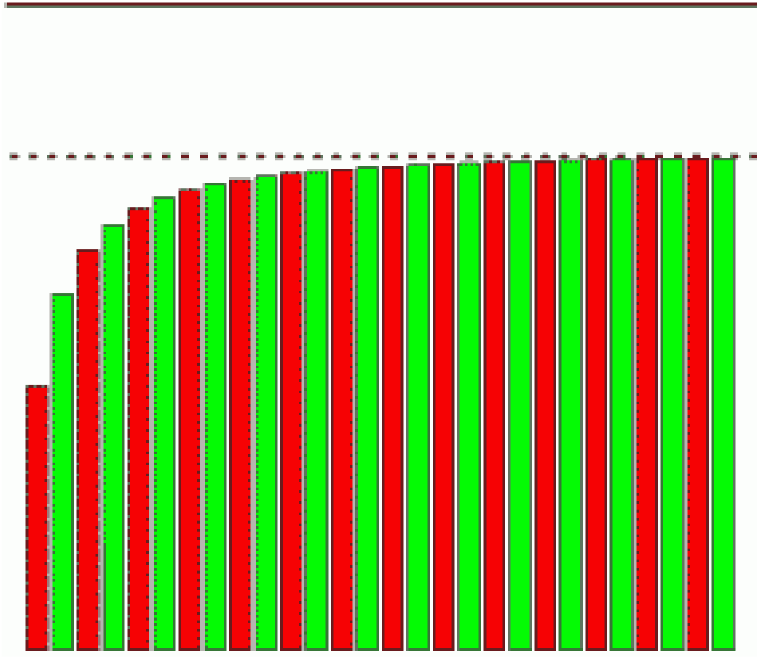


Ha a sor tagjai mind pozitívak, a részletösszegek monoton növekszenek. A helyzet egyszerű:

Ha a részletösszegek minden határon túl növekszenek, a sor divergens.



Ha a részletösszegek korlátosak, a sor konvergens.



Példa:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{k}+\cdots$$

Példa:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{k}+\cdots$$

$$s_{2^n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^n}$$

Példa:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{k}+\cdots$$

$$s_{2^n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^n}$$

$$\geq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^n}$$

$$\geq 1+\frac{1}{2}\cdot n$$

A részletösszegek nem korlátosak, ezért a fenti, ún. *harmonikus sor* divergens, azaz nincs összege.

Példa:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\cdots$$

Példa:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\cdots$$

$$s_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$$

$$\leq 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}$$

Példa:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\cdots$$

$$s_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$$

$$\leq 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}$$

tudjuk, hogy $\frac{1}{(k-1)k}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$

$$\leq 1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+-\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$$

Példa:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\cdots$$

$$s_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$$

$$\leq 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}$$

tudjuk, hogy $\frac{1}{(k-1)k}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$

$$\leq 1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+-\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$$

$$\leq 2-\frac{1}{n}\leq 2$$

Mivel a részletösszegek (növekedőek és) korlátosak, a

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\cdots$$

sornak van összege, nem tudjuk, mennyi, de legfeljebb 2.

Belátható, hogy

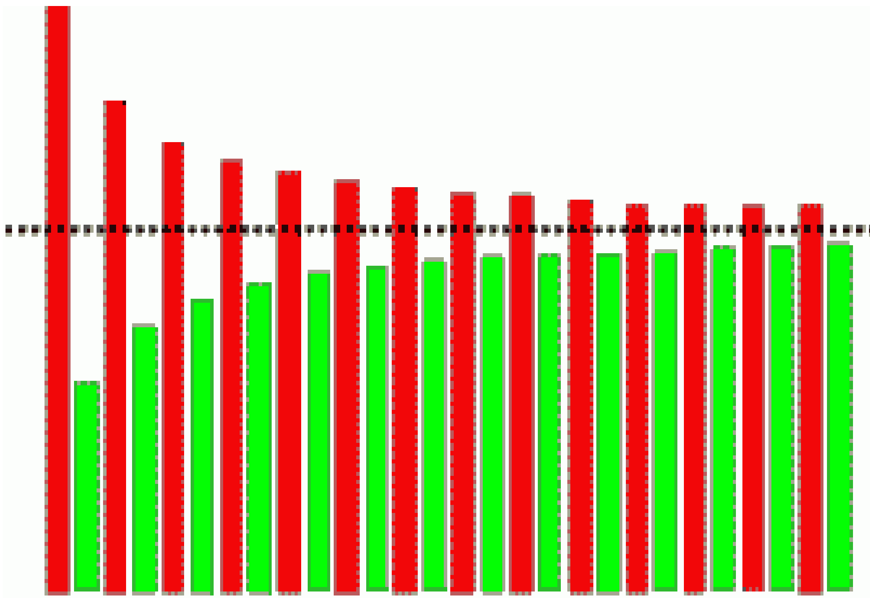
$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

Példa:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+-\cdots+(-1)^{k-1}\frac{1}{k}+\cdots$$

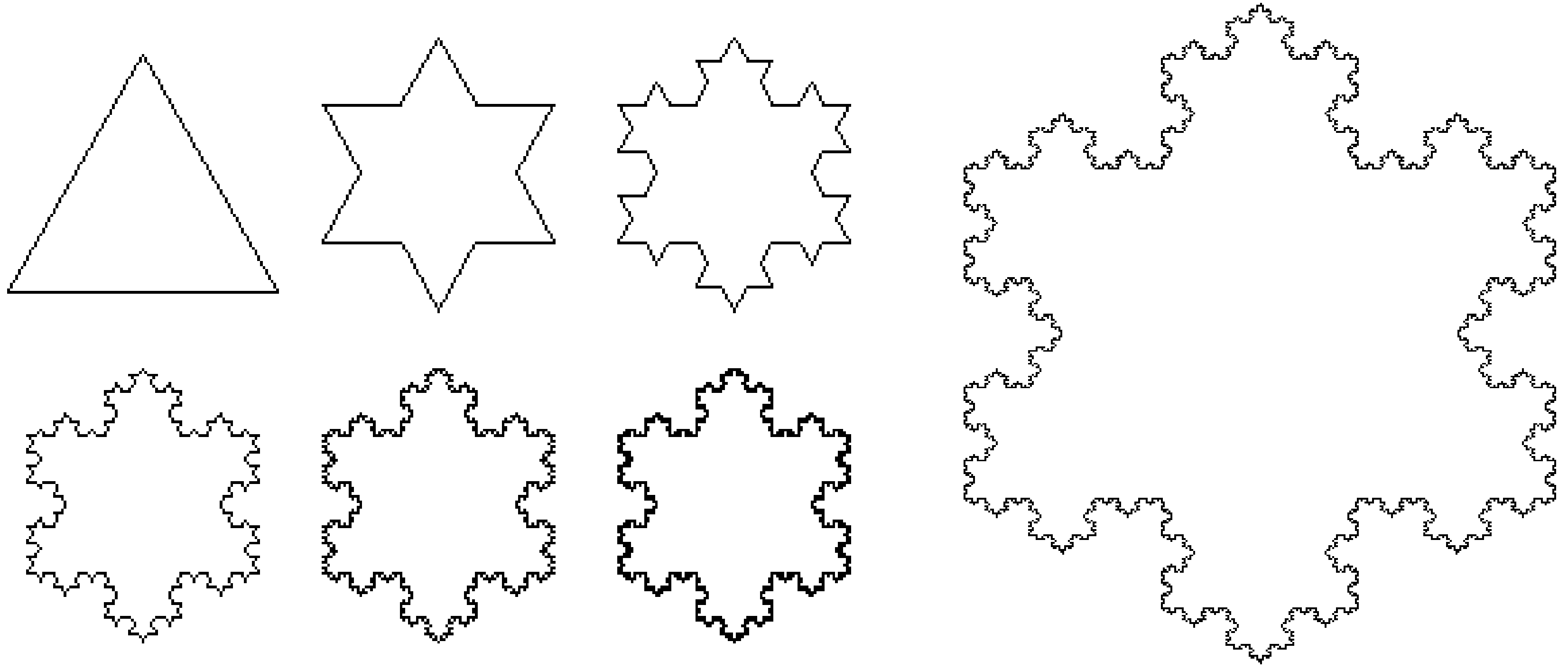
Példa: $$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+-\cdots+(-1)^{k-1}\frac{1}{k}+\cdots$$

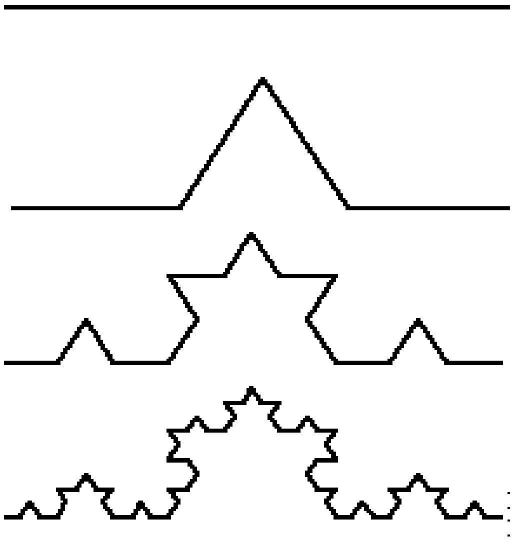
A sor tagjai egyre kisebbek és váltakozó előjelűek. Az ilyen sorok mindig konvergensek, mert a részletösszegek egy számra húzódnak rá.



Tehát a fenti sornak van összege.

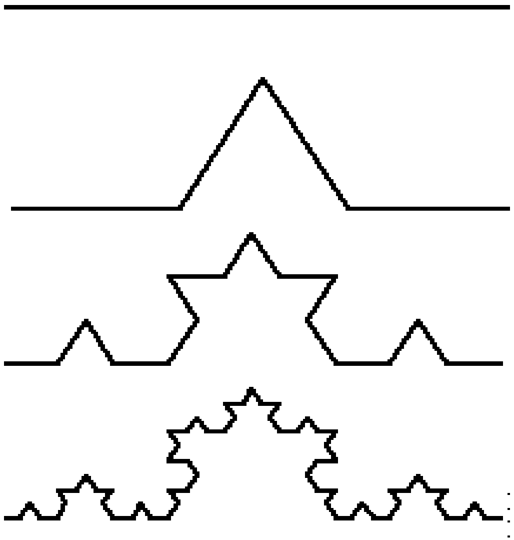
Egy háromszög minden oldalára tegyünk egy harmadakkora háromszöget, majd ezt folytassuk. A “határalakzat” az ún. *Koch-féle hópehely*.





Az eredeti háromszög oldala legyen 1.
Minden lépésben

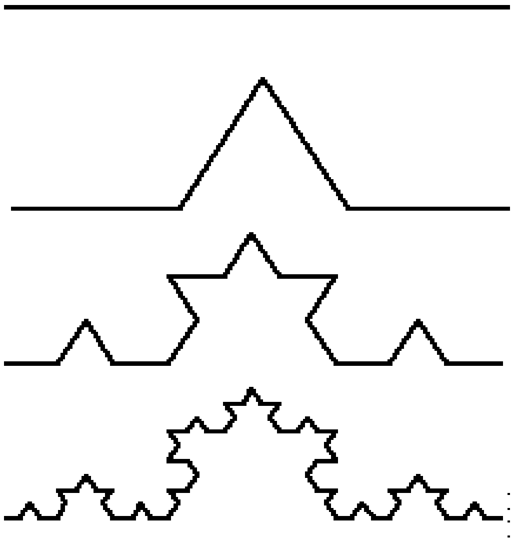
az oldalak száma megnégyszereződik,
hosszuk pedig harmadolódik.



Az eredeti háromszög oldala legyen 1.
Minden lépésben

az oldalak száma megnégyszereződik,
hosszuk pedig harmadolódik.

Az n-edik alakzat kerülete tehát $3\left(\frac{4}{3}\right)^n$.

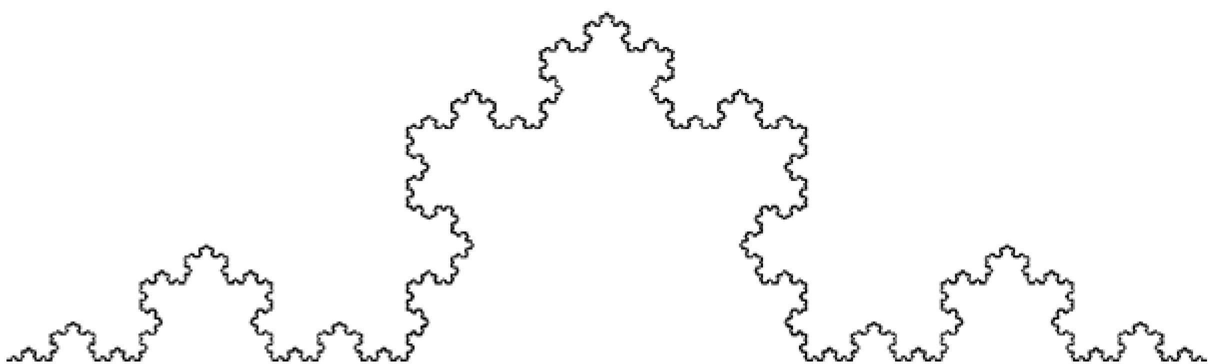


Az eredeti háromszög oldala legyen 1.
Minden lépésben

az oldalak száma megnégyszereződik,
hosszuk pedig harmadolódik.

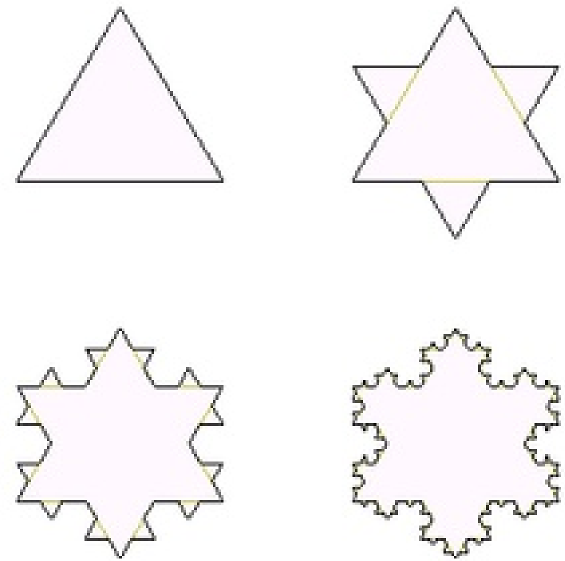
Az *n*-edik alakzat kerülete tehát $3\left(\frac{4}{3}\right)^n$.

Ez a sorozat minden határon túl nő, tehát a Koch-hópehely kerülete végtelen nagy!
Akkor igencsak kanyargós lehet . . .

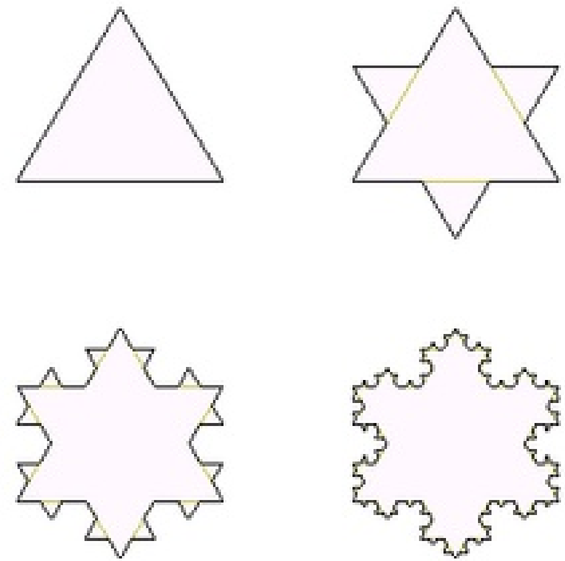


Az n-edik lépésben a hozzáragasztott kis háromszögek

területe: $3 \cdot 4^{n-1} \left(\frac{1}{9}\right)^{n} \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$,



Az n-edik lépésben a hozzáragasztott kis háromszögek

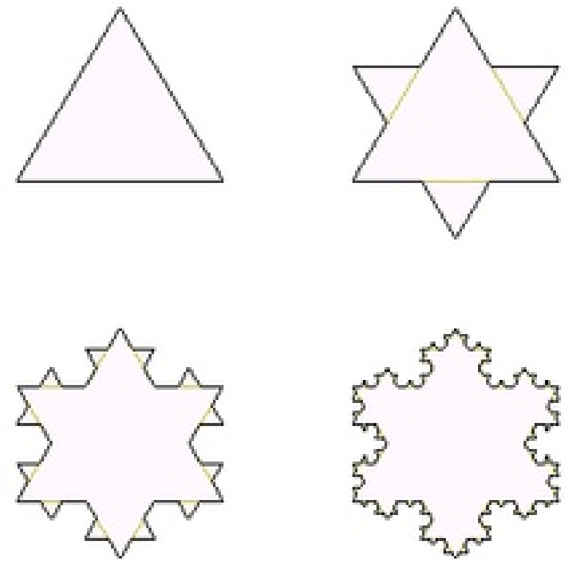


területe: $3\cdot 4^{n-1}\left(\frac{1}{9}\right)^{n}\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$,

tehát a hópehely területe

$$\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{1}{3}\left(1+\left(\frac{4}{9}\right)+\left(\frac{4}{9}\right)^{2}+\left(\frac{4}{9}\right)^{3}+\cdots\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{4}{9}}=\frac{8}{5}\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Az n-edik lépésben a hozzáragasztott kis háromszögek



területe: $3\cdot 4^{n-1}\left(\frac{1}{9}\right)^{n}\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$,

tehát a hópehely területe

$$\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{1}{3}\left(1+\left(\frac{4}{9}\right)+\left(\frac{4}{9}\right)^{2}+\left(\frac{4}{9}\right)^{3}+\cdots\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{4}{9}}=\frac{8}{5}\frac{\sqrt{3}}{4}$$

tehát a végtelen hosszú görbe véges területet határol! ☺

(Azért a kerület és terület fogalma igazából tisztázandó.)

Egy apa elhatározza, hogy gyermekének minden születésnapjára annyiszor 1000 Ft-ot ajándékoz, ahány éves (a gyerek). Mennyi pénzt tegyen a bankba évi 6 %-os kamatra, hogy ezt akármeddig folytathassa?

Ahhoz, hogy n év múlva $n \cdot 1000$ forintunk legyen, most $\dfrac{n \cdot 1000}{q^n}$

Ft-ot kell a bankba rakni (ahol $q = 1{,}06$). A keresett összeg tehát

$$1000 \cdot \left(\frac{1}{q} + \frac{2}{q^2} + \frac{3}{q^3} + \frac{4}{q^4} + \frac{5}{q^5} + \cdots \right)$$

$$
\begin{array}{l}
\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}+\frac{1}{q^4}+\frac{1}{q^5}+\cdots \\
\phantom{\frac{1}{q}+{}}\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}+\frac{1}{q^4}+\frac{1}{q^5}+\cdots \\
\phantom{\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+{}}\frac{1}{q^3}+\frac{1}{q^4}+\frac{1}{q^5}+\cdots \\
\phantom{\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}+{}}\frac{1}{q^4}+\frac{1}{q^5}+\cdots \\
\phantom{\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}+\frac{1}{q^4}+{}}\ddots
\end{array}
$$

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}+\frac{1}{q^4}+\frac{1}{q^5}+\cdots \\
\phantom{\frac{1}{q}+{}}\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}+\frac{1}{q^4}+\frac{1}{q^5}+\cdots \\
\phantom{\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+{}}\frac{1}{q^3}+\frac{1}{q^4}+\frac{1}{q^5}+\cdots \\
\phantom{\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}+{}}\frac{1}{q^4}+\frac{1}{q^5}+\cdots \\
\phantom{\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}+\frac{1}{q^4}+{}}\ddots \\
\frac{1}{q}+\frac{2}{q^2}+\frac{3}{q^3}+\frac{4}{q^4}+\frac{5}{q^5}+\cdots
\end{array}$$

$$\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}+\frac{1}{q^4}+\frac{1}{q^5}+\cdots=\frac{1}{q}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{q}}=\frac{1}{q-1}$$

$$\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}+\frac{1}{q^4}+\frac{1}{q^5}+\cdots=\frac{1}{q}\cdot\frac{1}{q-1}$$

$$\frac{1}{q^3}+\frac{1}{q^4}+\frac{1}{q^5}+\cdots=\frac{1}{q^2}\cdot\frac{1}{q-1}$$

$$\frac{1}{q^4}+\frac{1}{q^5}+\cdots=\frac{1}{q^3}\cdot\frac{1}{q-1}$$

$$\ddots$$

$$\frac{1}{q}+\frac{2}{q^2}+\frac{3}{q^3}+\frac{4}{q^4}+\frac{5}{q^5}+\cdots=\frac{1}{q-1}\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}+\frac{1}{q^4}+\frac{1}{q^5}+\cdots\right)$$

$$\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}+\frac{1}{q^4}+\frac{1}{q^5}+\dots=\frac{1}{q}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{q}}=\frac{1}{q-1}$$

$$\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}+\frac{1}{q^4}+\frac{1}{q^5}+\dots=\frac{1}{q}\cdot\frac{1}{q-1}$$

$$\frac{1}{q^3}+\frac{1}{q^4}+\frac{1}{q^5}+\dots=\frac{1}{q^2}\cdot\frac{1}{q-1}$$

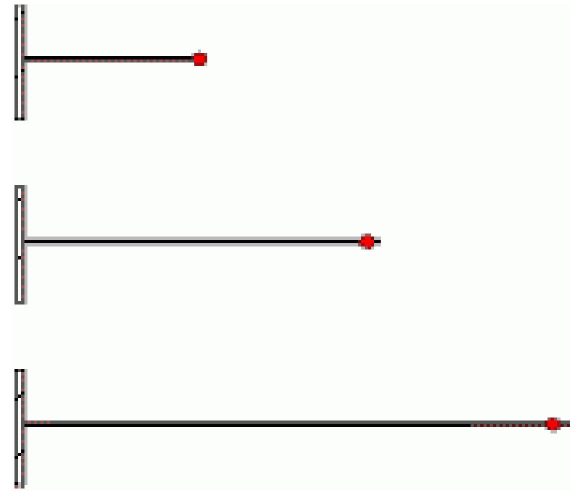
$$\frac{1}{q^4}+\frac{1}{q^5}+\dots=\frac{1}{q^3}\cdot\frac{1}{q-1}$$

$$\ddots$$

$$\frac{1}{q}+\frac{2}{q^2}+\frac{3}{q^3}+\frac{4}{q^4}+\frac{5}{q^5}+\dots=\frac{1}{q-1}\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}+\frac{1}{q^4}+\frac{1}{q^5}+\dots\right)=\left(\frac{1}{q-1}\right)^2$$

A feladat számaival ez kb. 277 ezer Ft.

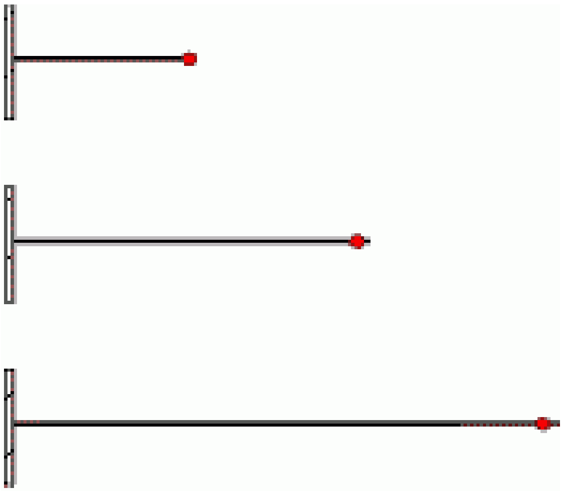
Egy 10 m hosszú gumikötél egyik vége rögzített, a másik végétől egy csiga mászik a fal felé, 1 cm/s sebességgel.
Igen ám, de a kötelet egy gonosz manó közben nyújtja, 10 m/s sebességgel.
Eléri-e a csiga a falat?



1 s múlva a csiga megtett legalább 1 cm-t, a kötél 2000 cm.
2 s múlva a csiga megtett legalább 1,5 + 1 cm-t, a kötél 3000 cm.

Ez nem hangzik valami jól . . .

Egy 10 m hosszú gumikötél egyik vége rögzített, a másik végétől egy csiga mászik a fal felé, 1 cm/s sebességgel.
Igen ám, de a kötelet egy gonosz manó közben nyújtja, 10 m/s sebességgel.
Eléri-e a csiga a falat?



1 s múlva a csiga megtett legalább 1 cm-t, a kötél 2000 cm, tehát megtette az út legalább $\frac{1}{2000}$ részét.
2 s múlva a csiga megtett legalább 1,5 +1 cm-t, a kötél 3000 cm, tehát megtette az út legalább $\frac{1}{2000}+\frac{1}{3000}$ részét.

Ez az!

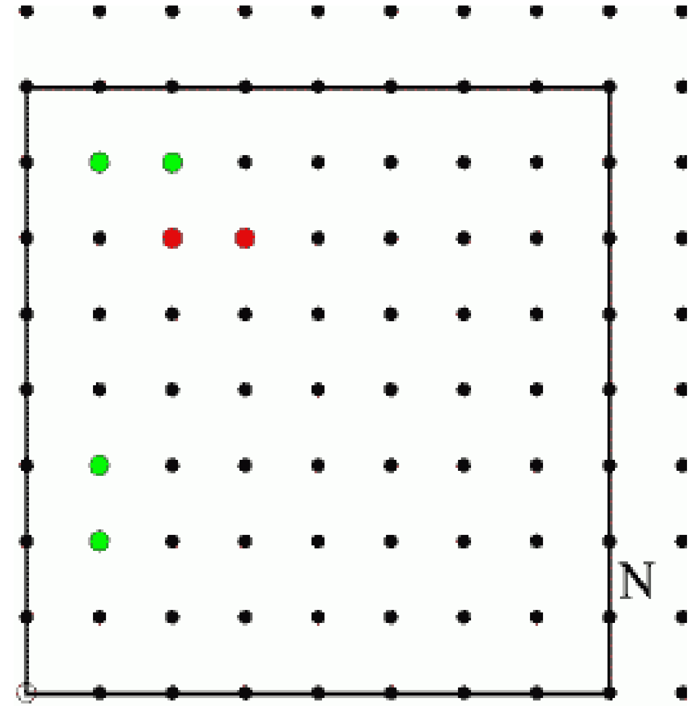
Tehát n s múlva a csiga megtette az út legalább

$$\frac{1}{1000}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

részét. Mivel a zárójelben levő összeg minden határon túl nő. eléri az 1000 értéket is, és akkor a csiga célba ért.

(A feladat adatait komolyan véve, mintegy 10^{427} év alatt, a Föld kora mintegy 10^{9} év ☺)

Az ábrán látható négyzetrácsban hány pont látszik a bal alsó sarokból?



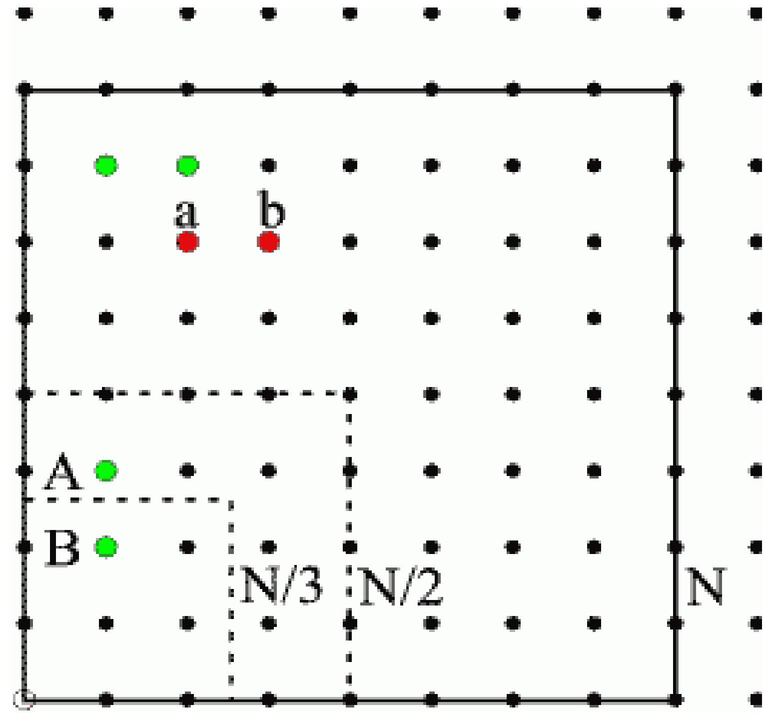
Az ábrán például a zöld pontok látszanak, a pirosak nem.

Bebizonyítható, hogy *N* növelésével a látható és az összes pontok számának aránya egy állandó *K* értékhez közelít.

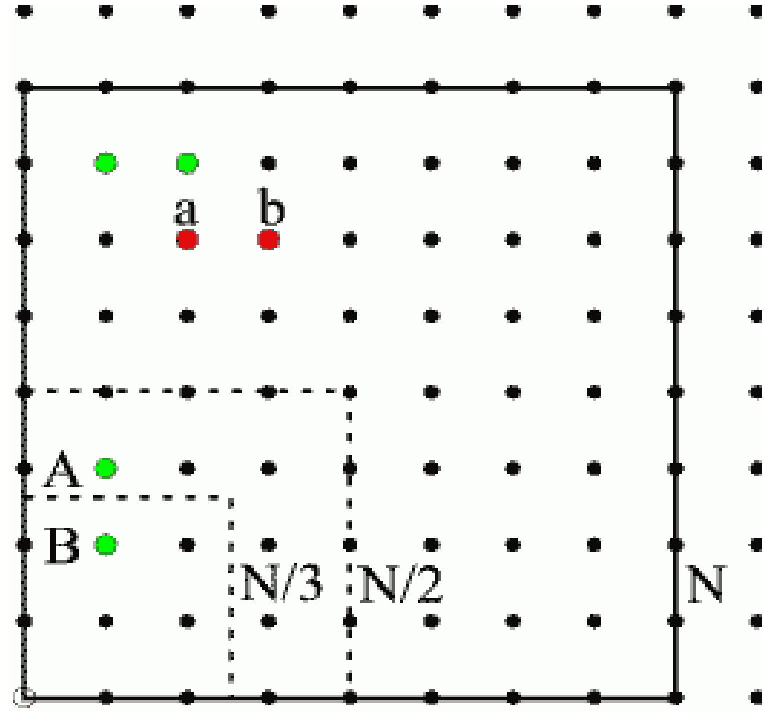
Mekkora ez a *K* állandó?

(Úgy is fogalmazhattuk volna a kérdést, hogy milyen gyakoriak a relatív prím számpárok.)

A nem látható pontokat (mint *a* és *b*), nyilván látható pontok takarják el (mint *A* és *B*). Az *a* pontot feleúton takarja el a *A* pont, az ilyen takarópontok láthatóak az *N*/2 oldalú négyzetben. A *b* pontot harmadúton takarja el a *B*, az ilyen takarópontok láthatóak az *N*/3 oldalú négyzetben . . .

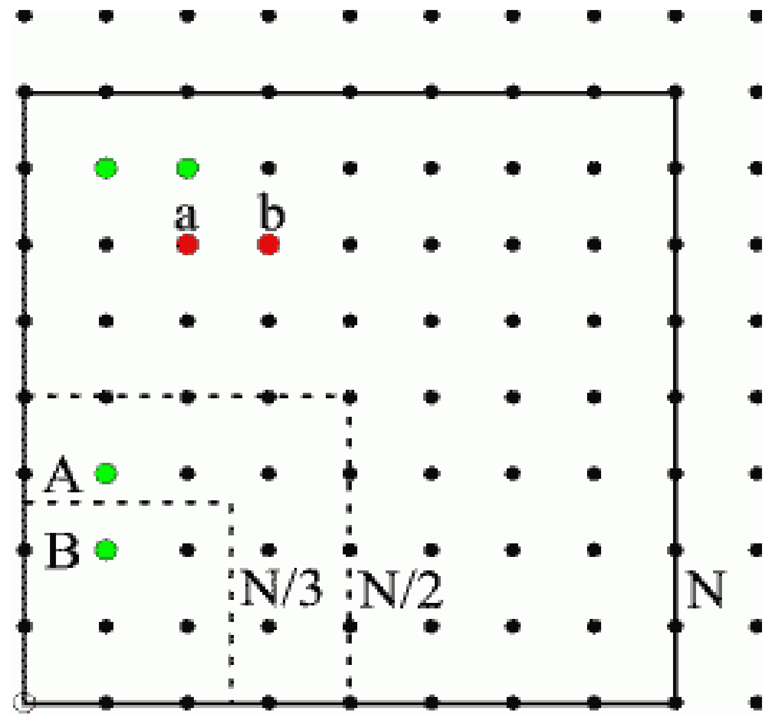


A nem látható pontokat (mint *a* és *b*), nyilván látható pontok takarják el (mint *A* és *B*). Az *a* pontot feleúton takarja el a *A* pont, az ilyen takarópontok láthatóak az *N*/2 oldalú négyzetben. A *b* pontot harmadúton takarja el a *B*, az ilyen takarópontok láthatóak az *N*/3 oldalú négyzetben . . .
A látható pontok száma



$$K \cdot N^2 = N^2 - K\left(\frac{N}{2}\right)^2 - K\left(\frac{N}{3}\right)^2 - K\left(\frac{N}{4}\right)^2 - \cdots,$$

A nem látható pontokat (mint *a* és *b*), nyilván látható pontok takarják el (mint *A* és *B*). Az *a* pontot feleúton takarja el a *A* pont, az ilyen takarópontok láthatóak az *N*/2 oldalú négyzetben. A *b* pontot harmadúton takarja el a *B*, az ilyen takarópontok láthatóak az *N*/3 oldalú négyzetben . . .
A látható pontok száma



$$K \cdot N^2 = N^2 - K\left(\frac{N}{2}\right)^2 - K\left(\frac{N}{3}\right)^2 - K\left(\frac{N}{4}\right)^2 - \cdots,$$

$$K = \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right)^{-1} = \frac{6}{\pi^2}$$

Egy igazi alkalmazás: a tizedes törtek

$$0{,}123123\ldots = \frac{123}{1000} + \frac{123}{1000^2} + \frac{123}{1000^3} + \cdots$$

Egy igazi alkalmazás: a tizedes törtek

$$0{,}123123\ldots = \frac{123}{1000} + \frac{123}{1000^2} + \frac{123}{1000^3} + \cdots$$

$$= \frac{123}{1000}\left(1 + \frac{1}{1000} + \frac{1}{1000^2} + \cdots\right) = \frac{123}{1000}\,\frac{1}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{123}{999},$$

hiszen a mértani sort már ismerjük.

Egy igazi alkalmazás: a tizedes törtek

$$0{,}123123\ldots = \frac{123}{1000} + \frac{123}{1000^2} + \frac{123}{1000^3} + \cdots$$

$$= \frac{123}{1000}\left(1 + \frac{1}{1000} + \frac{1}{1000^2} + \cdots\right) = \frac{123}{1000}\,\frac{1}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{123}{999},$$

hiszen a mértani sort már ismerjük.

Hasonlóan

$$0{,}9999\ldots = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots = \frac{9}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots\right)$$

Egy igazi alkalmazás: a tizedes törtek

$$0{,}123123\ldots = \frac{123}{1000} + \frac{123}{1000^2} + \frac{123}{1000^3} + \cdots$$

$$= \frac{123}{1000}\left(1 + \frac{1}{1000} + \frac{1}{1000^2} + \cdots\right) = \frac{123}{1000}\frac{1}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{123}{999},$$

hiszen a mértani sort már ismerjük.

Hasonlóan

$$0{,}9999\ldots = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots = \frac{9}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots\right)$$

$$= \frac{9}{10}\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{9}{9} = 1 \qquad ☺$$

$$0{,}9999\ldots = 1$$

Ez elég meglepő, nézzük más úton is!

$$1 - \frac{1}{10} \quad \leq 0{,}9\ldots \quad \leq 1$$

$$0{,}9999\ldots = 1$$

Ez elég meglepő, nézzük más úton is!

$$1 - \frac{1}{10} \le 0{,}9\ldots \le 1$$

$$1 - \frac{1}{100} \le 0{,}99\ldots \le 1$$

$$1 - \frac{1}{1000} \le 0{,}999\ldots \le 1$$

$$0{,}9999\ldots = 1$$

Ez elég meglepő, nézzük más úton is!

$$\begin{array}{ccccc}
1-\frac{1}{10} & \leq & 0{,}9\ldots & \leq & 1 \\
1-\frac{1}{100} & \leq & 0{,}99\ldots & \leq & 1 \\
1-\frac{1}{1000} & \leq & 0{,}999\ldots & \leq & 1 \\
\downarrow & & & & \downarrow \\
1 & & & & 1
\end{array}$$

Ez az úgynevezett rendőr-elv.

Belátjuk, hogy minden tizedes törtnek van értelme.

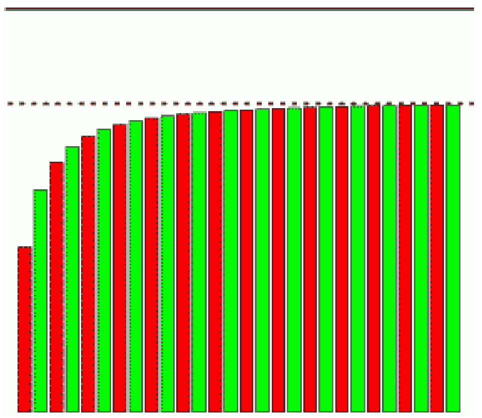
$$0,abcdef\ldots = \frac{a}{10} + \frac{b}{10^2} + \frac{c}{10^3} + \frac{d}{10^4} + \cdots \tag{1}$$

egy végtelen összeg.

Belátjuk, hogy minden tizedes törtnek van értelme.

$$0,abcdef\ldots = \frac{a}{10} + \frac{b}{10^2} + \frac{c}{10^3} + \frac{d}{10^4} + \cdots \qquad (1)$$

egy végtelen összeg.

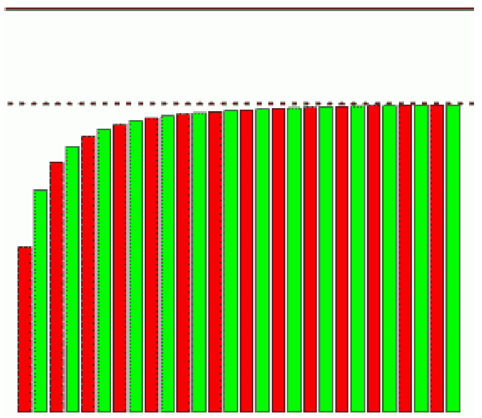


Részletösszegei monoton nőnek,
tehát elég a korlátosságot igazolni.

Belátjuk, hogy minden tizedes törtnek van értelme.

$$(1) \qquad 0,abcdef\ldots = \frac{a}{10} + \frac{b}{10^2} + \frac{c}{10^3} + \frac{d}{10^4} + \cdots$$

egy végtelen összeg.



Részletösszegei monoton nőnek,
tehát elég a korlátosságot igazolni.

$$\frac{a}{10} + \frac{b}{10^2} + \frac{c}{10^3} + \frac{d}{10^4} + \cdots \le \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \cdots = 1.$$

Még egy igazi alkalmazás: a π közelítése

Definíció. $$-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}, \qquad \tan(\arctan x) = x$$

$$\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}, \qquad \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

Még egy igazi alkalmazás: a π közelítése

Definíció. $$-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}, \qquad \tan(\arctan x) = x$$

$$\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}, \qquad \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

Belátható, hogy

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \cdots \qquad (-1 < x \le 1)$$

Még egy igazi alkalmazás: a π közelítése

Definíció. $$-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}, \qquad \tan(\arctan x) = x$$

$$\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}, \qquad \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

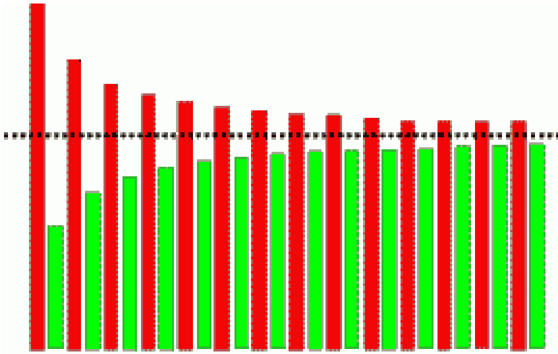
Belátható, hogy

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \cdots \qquad (-1 < x \le 1)$$

ebből

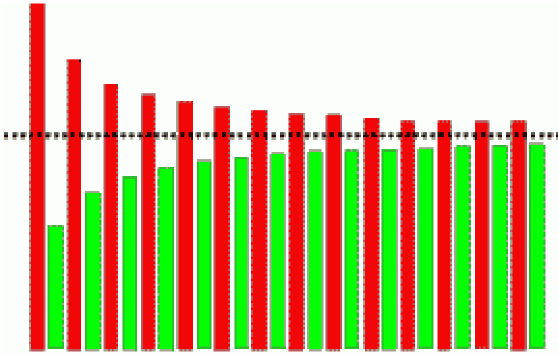
$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots = \frac{\pi}{4}$$

Igen ám, de milyen gyors a közelítés?



A hiba az utolsó hozzáadott taggal becsülhető

Igen ám, de milyen gyors a közelítés?



A hiba az utolsó hozzáadott taggal becsülhető

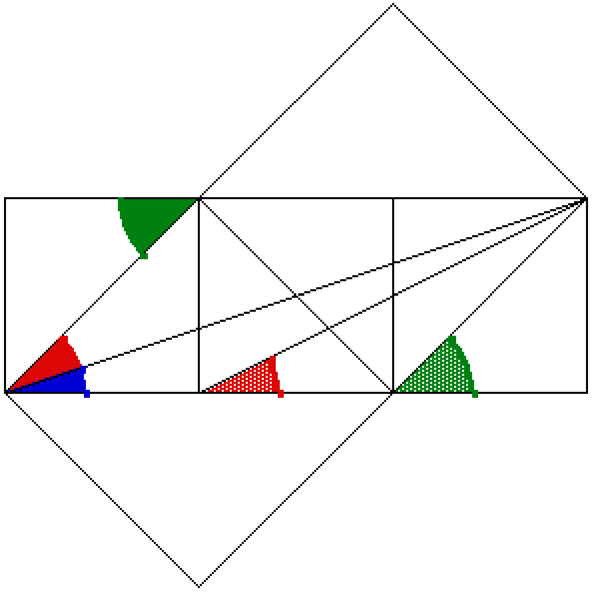
Ha 100 tagot adunk össze:

$$hiba \le \frac{1}{199} \approx \frac{1}{200}$$

Gyorsabban is közelíthetünk:

az ábra szerint

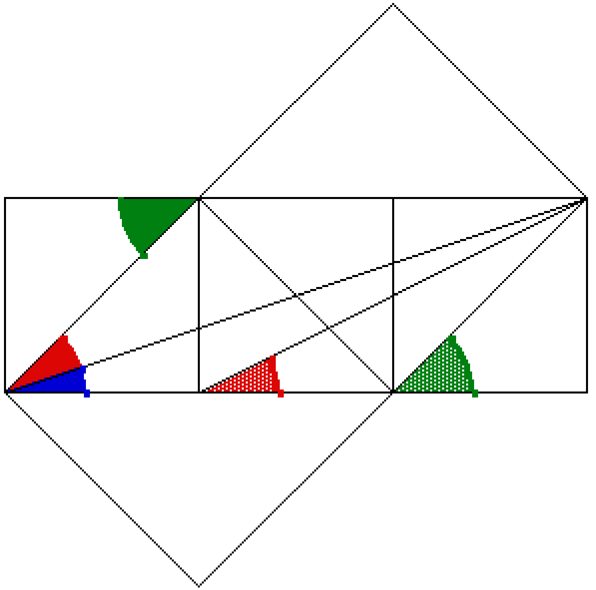
$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$$



Gyorsabban is közelíthetünk:

az ábra szerint

$$\frac{\pi}{4}=\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}$$

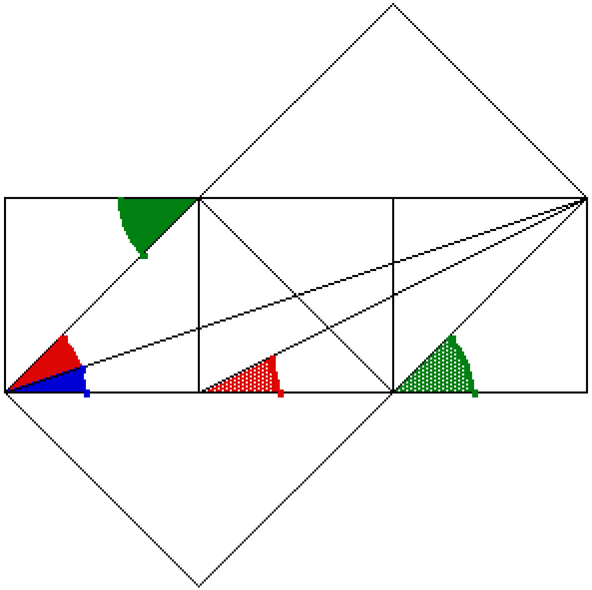


ezt használva

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^3\cdot 3}+\frac{1}{2^5\cdot 5}-\frac{1}{2^7\cdot 7}+-\cdots+\frac{1}{3}-\frac{1}{3^3\cdot 3}+\frac{1}{3^5\cdot 5}-\frac{1}{3^7\cdot 7}+-\cdots$$

Gyorsabban is közelíthetünk:

az ábra szerint



$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$$

ezt használva

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3 \cdot 3} + \frac{1}{2^5 \cdot 5} - \frac{1}{2^7 \cdot 7} + - \cdots + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^3 \cdot 3} + \frac{1}{3^5 \cdot 5} - \frac{1}{3^7 \cdot 7} + - \cdots$$

most a hiba (ismét 100 tagot adva össze)

$$hiba \approx \frac{1}{2^{99} \cdot 99} + \frac{1}{3^{99} \cdot 99} \approx 10^{-30},$$ ez 30 pontos tizedesjegy!

Tudjuk, hogy az alábbi összeg létezik:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots=s. \tag{1}$$

Tudjuk, hogy az alábbi összeg létezik:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots=s. \tag{1}$$

$$0+1+0-\frac{1}{2}+0+\frac{1}{3}+0-\frac{1}{4}+\cdots=s$$

Tudjuk, hogy az alábbi összeg létezik:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots=s. \tag{1}$$

$$0+1+0-\frac{1}{2}+0+\frac{1}{3}+0-\frac{1}{4}+\cdots=s$$

$$0+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{6}+0-\frac{1}{8}+\cdots=\frac{1}{2}\cdot s \tag{2}$$

Tudjuk, hogy az alábbi összeg létezik:

$$(1) \qquad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots=s.$$

$$0+1+0-\frac{1}{2}+0+\frac{1}{3}+0-\frac{1}{4}+\cdots=s$$

$$(2) \qquad 0+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{6}+0-\frac{1}{8}+\cdots=\frac{1}{2}\cdot s$$

$$(1)+(2) \qquad 1+0+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+0+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots=\frac{3}{2}\cdot s$$

Tudjuk, hogy az alábbi összeg létezik:

$$(1) \qquad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots=s.$$

$$0+1+0-\frac{1}{2}+0+\frac{1}{3}+0-\frac{1}{4}+\cdots=s$$

$$(2) \qquad 0+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{6}+0-\frac{1}{8}+\cdots=\frac{1}{2}\cdot s$$

$$(1)+(2) \qquad 1+0+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+0+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots=\frac{3}{2}\cdot s$$

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots=\frac{3}{2}\cdot s$$

Ezek szerint az (1) összeg megváltozhat,
ha a tagokat más sorrendben adjuk össze ! ?

A végtelen összegek

érdekesek!

☺