## Amikor függvények segítenek

(Rátz László Vándorgyűlés, 2004)

*Németh József*

**Oldja meg a következő egyenleteket!**

[1.] $\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}=2$

(*Útmutatás.* Vizsgálja az értelmezési tartományt!)

[2.] $x^2+1=\cos x$

(*Útmutatás.* Vizsgálja a megfelelő függvények értékkészletét!)

[3.] $\log_2 x-\log_3 x=\sqrt{1-x}$

(*Útmutatás.* Vizsgálja a megfelelő függvények értelmezési tartományát és értékkészletét!)

[4.] $|x+2|=ax+1$ (hány megoldás van az $a$ paraméter értékétől függően?)

(*Útmutatás.* Ábrázolja az $a=\frac{-1+|x+2|}{x}$ függvény-grafikont az $(x,a)$ koordinátarendszerben!)

[5.] $4^x+3^x=7$

(*Útmutatás.* A bal oldali függvény szigorúan monoton növő, így csak legfeljebb egy gyök lehet, ez $x=1$.)

[6.] $4^x-3^x=7$

(*Útmutatás.* A $7+3^x=4^x$ alakra hozás után $4^x$-szel leosztva elég a szigorú monotonitásra hivatkozni; az $x=2$-n kívül nincs más gyök.)

[7.] $\log_2 x-\log_3 x+1=\sqrt{2-x}$

(*Útmutatás.* A bal oldali függvény szigorúan nő, a jobb oldali csökken, így az $x=1$-en kívül több gyök nincs.)

[8.] $$\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x}-\sqrt[21]{\sin x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\cos x}-\sqrt[21]{\cos x}$$

(*Útmutatás.* Az $f(t)=\left(\frac{1}{2}\right)^t-\sqrt[21]{t}$ függvény szigorúan csökkenő.)

[9.] $(2x+1)(\sqrt{(2x+1)^2+3}+2)+3x(\sqrt{9x^2+3}+2)=0.$

(*Útmutatás.* Az $f(t)=t(\sqrt{t^2+3}+2)$ függvény páratlan és a $(0,\infty)$-n növő, így $(-\infty;\infty)$-n növő.)

[10.] $(x^2+100)^2=(x^3-100)^3$

(*Útmutatás.* Alkalmazza az $f(f(x))=x$ és $f(x)=x$ ekvivalenciáját megfogalmazó állítást!)

[11.] $$4^x+2=\frac{6}{2-x}$$

(*Útmutatás.* Alkalmazza a Rolle-féle középértéktételt annak igazolására, hogy nem lehet háromnál több gyök, azaz csak az $x_1=0,\ x_2=\frac{1}{2},\ x_3=1$ a gyökök!)

[12.] $x^3+6=7\cdot\sqrt[3]{7x-6}$

(*Útmutatás.* Alkalmazza az $f(f(x))=x$ és $f(x)=x$ ekvivalenciáját!)

[13.] $\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+x}}}=x$

(*Útmutatás.* Alkalmazza az $x=2\cos\varphi$ helyettesítést!)

[14.] $$\begin{aligned}\log_2 x-\log_2 y&=(x-y)^2\\ x^2+y^2&=1\end{aligned}$$

(*Útmutatás.* Alkalmazza a Lagrange-féle középértéktételt annak belátására, hogy nincs egynél több gyök, azaz csak az $(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2})$ a gyökpár!)

[15.] $x^5-10x^3+50x-41=0$

(*Útmutatás.* Alkalmazza a Rolle-féle középértéktételt annak belátására, hogy nincs egynél több gyök, azaz csak $x=1$ a megoldás!)

[16.] $x^y-y^x=1$ (a természetes számok körében)

(*Útmutatás.* Alkalmazza az $e^t\geq 1+t$ egyenlőtlenséget!)

[17.] $(x^2+4x-3)^{10}+(x^2+4x-3)^{22}=(x+1)^{10}+(x+1)^{22}$

(*Útmutatás.* Vegye figyelembe, hogy az $f(u)=u^5+u^{11}$ függvény szigorúan növő!)

[18.] $\sqrt[3]{\sqrt[3]{x+24}+24}=x$

(*Útmutatás.* Alkalmazza az $x=f(f(x))$ és $x=f(x)$ ekvivalenciáját!)

[19.] $\sin(\sin x)=x$

(*Útmutatás.* Lásd a 18. példához fűzött útmutatást!)

[20.] $2x-\sin x=2y-\sin y,\ x+2y=9$

(*Útmutatás.* Használja ki, hogy az $f(u)=2u-\sin u$ függvény szigorúan növő (ezt deriválással lehet könnyen megmutatni!)

[21.] $$\begin{aligned}x-y&=\log_2 y-\log_2 x\\ x^2+y&=12\end{aligned}$$

(*Útmutatás.* Használja ki, hogy az $f(u)=u+\log_2 u$ függvény szigorúan növő!)

[22.] $$\begin{aligned}&\sqrt[8]{x^3-8x^2-7x+2}+(x^3-8x^2-7x+2)^7=\\ &=\sqrt[8]{x^3-7x^2-18x+20}+(x^3-7x^2-18x+20)^7\end{aligned}$$

(*Útmutatás.* Vegye figyelembe, hogy az $f(u)=\sqrt[8]{u}+u^7$ függvény szigorúan növő a $(0;\infty)$-en!)

[23.] $\sqrt{3x+5}-\dfrac{1}{\sqrt{3x+5}}=\sqrt{5x-3}-\dfrac{1}{\sqrt{5x-3}}$

(*Útmutatás.* Vegye figyelembe, hogy az $f(u)=\sqrt{u}-\frac{1}{\sqrt{u}}$ függvény növő a $(0;\infty)$-en!)

[24.] $2x^3-(a+2)x^2-ax+a^2=0$ ($a$ valós paraméter)

(*Útmutatás.* Oldja meg $a$-ra a megfelelő másodfokú egyenletet!)

[25.] $a^7 + x = \sqrt[7]{a-x}$ ($a$ valós paraméter)

(*Útmutatás.* Alkalmazza az $f(f(x)) = x$ és $x = f(x)$ ekvivalenciájára vonatkozó állítást!)

[26.] $\sqrt{x} = x + a$ ($a$ valós paraméter)

(*Útmutatás.* Oldja meg grafikusan!)

[27.] $\sqrt{a - \sqrt{a+x}} = x$ ($a$ valós paraméter)

(*Útmutatás.* Négyzetre emelések után $a$-ban másodfokú egyenletre vezet.)

[28.] $x^4 - 2\sqrt{3}x^2 + x + 3 - \sqrt{3} = 0$

(*Útmutatás.* Tekintse az $a = \sqrt{3}$-at paraméternek és erre, mint másodfokú egyenletre oldja meg az egyenletet!)

[29.] $x^3 - (\sqrt{2}+1)x^2 + 2 = 0$

(*Útmutatás.* Tekintse az $a = \sqrt{2}$-t paraméternek és arra oldja meg a megfelelő másodfokú egyenletet!)

[30.] $x^{\log_7 4} + 5 \cdot 2^{\log_7 x} - 4 = 0$

(*Útmutatás.* Az egyenlet a $2^{\log_7 x}$-ben másodfokú lesz.)

## Vegyes feladatok

[1.] Adott hat különböző szám. Bizonyítsuk be, hogy van köztük kettő (mondjuk $x, y$) úgy, hogy $0 \le \frac{x-y}{1+xy} \le \frac{1}{\sqrt{3}}$ teljesüljön!

(*Útmutatás.* Legyen a hat szám: $\operatorname{tg}\alpha_1, \operatorname{tg}\alpha_2, \dots, \operatorname{tg}\alpha_6$, ahol $-\frac{\pi}{2} < \alpha_1 < \cdots < \alpha_6 < \frac{\pi}{2}$!)

[2.] Bizonyítsuk be, hogy $\sin 20^\circ > \dfrac{1}{3}$!

(*Útmutatás.* Vegyük a $\sin 20^\circ = \sin\frac{\pi}{9} = \int_0^{\pi/9} \cos x\, dx$ egyenlőtlenséget és írjunk alkalmas trapézt az $x = 0,\ y = 0,\ x = \frac{\pi}{9},\ y = \cos x$ görbevonalú trapézba, s így becsüljünk!)

[3.] Bizonyítsuk be, hogy az $a_n = \dfrac{\operatorname{tg} n}{n}$ sorozat divergens!

(*Útmutatás.* Először mutassuk meg, hogy a határérték (ha létezne), csak a 0 lehetne. Ezt az $n_k = [k\pi]$ sorozat segítségével látjuk be, ugyanis $\frac{\operatorname{tg} n_k}{n_k} \to 0$. Második lépésben pedig megadunk egy olyan $\{p_n\}$ sorozatot, amelyre $\left|\frac{\operatorname{tg} p_n}{p_n}\right| \ge \frac{1}{4}$. Ez utóbbinak a belátásához a Lagrange-féle középértéktételt használjuk!)

[4.] Melyik szám a nagyobb, $\log_{1500} 1501$ vagy $\log_{1501} 1502$?

(*Útmutatás.* Vizsgálja az $f(x) = \log_x(x+1)$ függvényt monotonitás szempontjából deriválással!)

[5.] Hány megoldása van az $a$ paramétertől függően az $\log_a x = x$ egyenletnek?

(*Útmutatás.* Vizsgálja az $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ függvényt szélsőérték szempontjából deriválással!)

[6.] Bizonyítsuk be, hogy $\dfrac{1}{52} < \ln\dfrac{52}{51} < \dfrac{1}{51}$!

(*Útmutatás*. Alkalmazza az $\int_{51}^{52} \frac{1}{x}\,dx$ integrált!)

[7.] Bizonyítsuk be, hogy $1 + \dfrac{1}{2^3} + \ldots + \dfrac{1}{n^3} < \dfrac{5}{4}$!

(*Útmutatás*. Alkalmazza az $\int_{2}^{n} \frac{1}{x^3}\,dx$ integrált!)

[8.] Bizonyítsuk be, hogy $e^x \geq 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$, ha $x \geq 0$!

(*Útmutatás*. Diszkutálja az $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$ függvényt deriválással!)

[9.] Bizonyítsuk be, hogy $x_1^{x_2} > x_2^{x_1}$, ha $e \leq x_1 < x_2$!

(*Útmutatás*. Diszkutálja az $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ függvényt deriválással!)

[10.] Bizonyítsuk be, hogy $\mathrm{tg} x > 3x + 2\sin x$, ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$!

(*Útmutatás*. Diszkutálja az $f(x) = \mathrm{tg}\, x - 3x - 2\sin x$ függvényt deriválással!)