

Műszaki matematika II.

Valószínűségszámítás 1.

Bogya Norbert, Fülöp Vanda

Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet

2019

1. Feladat

Hat héten keresztül, minden héten fogadunk a Barcelona aktuális heti BL meccsének eredményére. Jelölje B_i azt az eseményt, hogy az i -edik héten nyerünk. Fejezzük ki az alábbi eseményeket a $B_1, \dots, B_6$ események segítségével. Fogalmazzuk meg az A_2, A_3 események tagadását is.

- $A_1 =$ Van olyan hét, amikor nyerünk.
- $A_2 =$ Egyik héten sem nyerünk.
- $A_3 =$ A második héten nyerünk, de a negyedik héten nem.
- $A_4 =$ Az ötödik héten nyerünk először.
- $A_5 =$ Legfeljebb egy héten nyerünk.

Megoldás

- $A_1 = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_6$
- $A_2 = \overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_6}, \quad \overline{A_2} = B_1 \cup \dots \cup B_6$
- $A_3 = B_2 \cap \overline{B_4}, \quad \overline{A_3} = \overline{B_2} \cup B_4$
- $A_4 = \overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3} \cap \overline{B_4} \cap B_5$
- $A_5 = (\overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_6}) \cup (B_1 \cap \overline{B_2} \cap \dots \cap \overline{B_6}) \cup \dots \cup (\overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_5} \cap B_6)$

2. Feladat

Egy szabályos dobókockát négyszer egymás után feldobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

- (a) a négy dobott szám különböző;
- (b) legfeljebb kettő 4-est dobunk;
- (c) legalább egy 6-ost dobunk;
- (d) van a dobott számok között páratlan szám.

Megoldás

$$(a) \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^4} \approx 0,2778$$

$$(b) \frac{5^4}{6^4} + 4 \cdot \frac{5^3}{6^4} + 6 \cdot \frac{5^2}{6^4} \approx 0,9838$$

$$(c) 1 - \frac{5^4}{6^4} \approx 0,5177$$

$$(d) 1 - \frac{1}{2^4} = 0,9375$$

3. Feladat

Két szabályos dobókockát feldobva mennyi annak a valószínűsége, hogy

- (a) két azonos számot dobunk;
- (b) két különböző számot dobunk;
- (c) a dobott számok összege 7;
- (d) valamelyik kockával 6-ost dobunk;
- (e) pontosan az egyik kockával dobunk 6-ost?

Megoldás

$$(a) \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0,1667$$

$$(b) 1 - \frac{6}{36} = \frac{5}{6} \approx 0,8333$$

$$(c) \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0,1667$$

$$(d) 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36} \approx 0,3056$$

$$(e) \frac{10}{36} \approx 0,2778$$

4. Feladat

Egy ételautomatából négyféle szendvics (sonkás, szalámis, tonhalas és vegetáriánus) illetve háromféle innivaló (tej, kakaó és tea) vásárolható. Anna a szendvicsek közül a sonkásat és a szalámisat, az italok közül pedig a kakaót szereti. Anna véletlenszerűen vásárol egy ételt és egy italt a gépből. Mennyi annak az esélye, hogy

- (a) a kapott ételt és a kapott italt is szeretni fogja;
- (b) a kettő közül valamelyiket szeretni fogja;
- (c) a kettő közül pontosan az egyiket fogja majd szeretni?

$$(a) \frac{\binom{2}{1} \binom{1}{1}}{\binom{4}{1} \binom{3}{1}} = \frac{1}{6} \approx 0,1667$$

$$(b) 1 - \frac{\binom{2}{1} \binom{2}{1}}{\binom{4}{1} \binom{3}{1}} = \frac{2}{3} \approx 0,6667$$

$$(c) \frac{\binom{2}{1} \binom{2}{1} + \binom{2}{1} \binom{1}{1}}{\binom{4}{1} \binom{3}{1}} = \frac{1}{2} = 0,5$$

5. Feladat

Egy dobozban 8 termék van, amiből 2 selejt, a többi nem selejt. Három terméket veszünk ki egymás után a dobozból. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

- (a) a kivett 3 termék között nincs selejt;
- (b) legalább 2 selejt van a kivett 3 között?

Oldjuk meg a feladatot visszatevéses és visszatevés nélküli mintavétellel is.

Megoldás

Visszatevés nélkül:

$$(a) P(A) = \frac{\binom{6}{3} \cdot \binom{2}{0}}{\binom{8}{3}} \approx 0,3571$$

$$(b) P(B) = \frac{\binom{6}{1} \cdot \binom{2}{2}}{\binom{8}{3}} \approx 0,1071$$

Visszatevéssel:

$$(a) P(A) = \frac{6^3}{8^3} \approx 0,4219$$

$$(b) P(B) = 3 \cdot \frac{2 \cdot 2 \cdot 6}{8^3} + \frac{2^3}{8^3} \approx 0,1406$$

6. Feladat

Rózsa néni nagyon szereti a kertjét, különösen a tulipánjait. Ősszel a legszebb tulipánok közül kiválaszt 5 pirosat, 4 narancssárgát és 2 fehérét, és felszedi a hagymákat. Sajnos a hagymák a téli tárolás során összekeverednek. A következő tavasszal Rózsa néni véletlenszerűen kiválaszt 7 hagymát, és kiülteti őket. Mennyi az esélye annak, hogy a kiválasztott hagymák között

- (a) pontosan 4 piros lesz;
- (b) pontosan 4 piros, 2 narancssárga és 1 fehér lesz;
- (c) lesz fehér;
- (d) lesz piros;
- (e) pontosan két különböző szín fog majd előfordulni, és ezek 4 illetve 3 tulipánon jelennek meg?

Megoldás

$$(a) \frac{\binom{5}{4} \binom{6}{3}}{\binom{11}{7}} \approx 0,3030$$

$$(b) \frac{\binom{5}{4} \binom{4}{2} \binom{2}{1}}{\binom{11}{7}} \approx 0,1818$$

$$(c) 1 - \frac{\binom{9}{7} \binom{2}{0}}{\binom{11}{7}} \approx 0,8909$$

$$(d) 1$$

$$(e) \frac{\binom{5}{4} \binom{4}{3} + \binom{4}{4} \binom{5}{3}}{\binom{11}{7}} \approx 0,0909$$

7. Feladat

Két testvér ugyanabba a 28 fős osztályba jár. Egy gyors sorakozónál mindenki találomra áll be.

- (a) Mi a valószínűsége, hogy a két testvér egymás mellé kerül?
- (b) Mennyi az esélye annak, hogy pontosan tízen állnak közöttük?

$$(a) \quad 2 \cdot \frac{27!}{28!} = \frac{2}{28} \approx 0,0714$$

$$(b) \quad \frac{\binom{26}{10} \cdot 10! \cdot 2 \cdot 16! \cdot 17}{28!} = \frac{17}{378} \approx 0,0450$$

8. Feladat

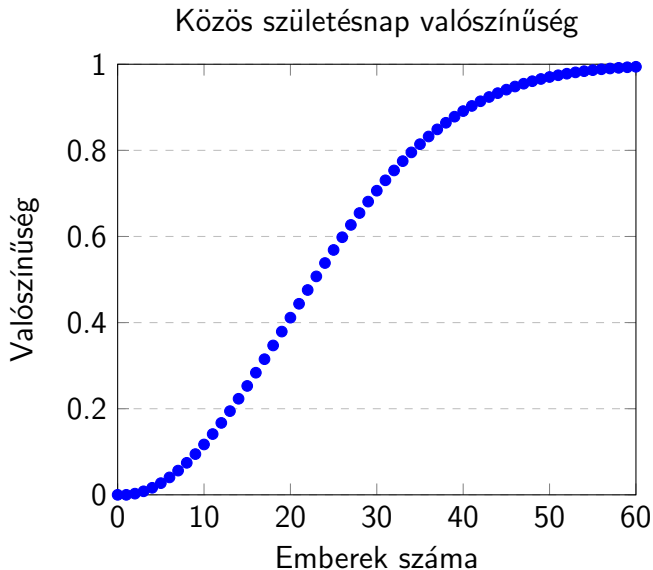
Mekkora az esélye, hogy van a teremben két ember, aki ugyanazon a napon született?

Tegyük fel, hogy a teremben lévőek száma 30.

$$1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - 29)}{365^{30}} \approx 0,7063$$

Ha a teremben lévőek száma n , akkor

$$1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - (n - 1))}{365^n}$$



9. Feladat

Anzu, Sethekk Halls-beli megölése utána 1,6%-os eséllyel megkapjuk a Reins of the Raven Lord mountot. Mekkora a valószínűsége a következő eseményeknek?

- A = Pontosan másodszorra sikerül megszerezni a mountot.
- B = Legfeljebb négyszer kell legyőzni Anzut, hogy kapjuk a mountot.
- C = Legalább tízszer kell legyőzni Anzut, hogy kapjuk a mountot.

- $P(A) = 0,984 \cdot 0,016 = 0,015744$
- $P(B) = 0,016 + 0,016 \cdot 0,984 + 0,016 \cdot 0,984^2 + 0,016 \cdot 0,984^3 \approx 0,0625$
- $P(C) = 0,984^9 \approx 0,8649$

10. Feladat

Hányszor dobjak fel egy szabályos pénzérmét, ha az a célom, hogy a dobások között 90% valószínűséggel legyen fej?

$$n \geq \frac{\ln 0,1}{\ln 0,5} \approx 3,3219$$