

MŰSZAKI MATEMATIKA

Gyakorlat

2017. április 10.

1. Gyakorlat (70)

Gy.1. Oldjuk meg az alábbi (szétválasztható) differenciálegyenleteket:

$$y'x = -y; \quad xy' - (y^3 - y) = 0, \quad y(2) = 2; \quad dy = (x - yx)dx$$

Gy.2. Oldjuk meg az alábbi (változóiban homogén) differenciálegyenleteket:

$$xy' - x = 2y; \quad xe^{\frac{y}{x}} = xy' - y, \quad y(1) = 0;$$
$$y'(xy - x^2) = y^2, \quad y(1) = e; \quad (x - y)dy = (x + y)dx; \quad y' = \frac{5x - 2y}{2x + y}$$

2. Gyakorlat (65)

Gy.1. Oldjuk meg az alábbi (lineáris) differenciálegyenleteket:

$$y' - \frac{y}{x} = x^3 - 2x, \quad y(1) = 2; \quad y' - \frac{y}{x} = x^3 \ln x - 2x, \quad y(1) = 2$$
$$y' \sin x + y \cos x + 1 = 0, \quad y(\pi/2) = 0; \quad (2x - y)dx - (1 - x)dy = 0.$$

Gy.2. Oldjuk meg az alábbi (hiányos másodrendű) differenciálegyenleteket:

a) $(1 - x^2)y'' + 2xy' = 0; \quad y'' - 2y' = x; \quad x^2y'' + 2xy' = \ln x, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 2;$
b) $yy'' + (y')^2 = 0; \quad 3y'y'' = e^y, \quad y(-3) = 0, \quad y'(-3) = 1; \quad 2y'' + (y')^3 = 0, \quad y(1) = y'(1) = 1.$

3. Gyakorlat (70)

Gy.1. Határozzuk meg a következő függvények Laplace-transzformáltjait:

$$f(x) = 4x^3 - 2, \quad f(x) = e^{2x}, \quad f(x) = \cos 3x, \quad f(x) = 5 \sin(-x) + 3 \cos 4x, \quad f(x) = \sin 2x \cdot e^{-3x}.$$

Gy.2. Az $L[f(x)](p)$ Laplace-transzformált ismeretében határozzuk meg az eredeti f függvényt:

$$L[f(x)](p) = \frac{1}{p+1}, \quad L[f(x)](p) = \frac{1}{(p-3)^4}, \quad L[f(x)](p) = \frac{1}{p^2+2},$$
$$L[f(x)](p) = \frac{p+3}{p^2+2}, \quad L[f(x)](p) = \frac{p+1}{p^2-2p+3}, \quad L[f(x)](p) = \frac{p+1}{p^2-2p-3}.$$

Gy.3. Laplace-transzformációval oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket:

$$y'' - 4y = 3e^{-x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 5,$$
$$y'' - y' - 2y = e^x + 4x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1,$$
$$y'' - y' - 2y = 8 \sin x - 2 \cos x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$
$$y'' + 2y' = e^{-x} \sin x + x - 2y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$$

4. Gyakorlat (65)

Gy.1. Vizsgáljuk a következő sorok konvergenciáját. Ha a sor konvergens, határozzuk meg az összegét:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{7^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^{n-2}}{3^{2n+1}}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 4^n - 3^{n+1}}{5^{n-1}}, \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2 \cdot 5^{n+2} - 4^{n+3}}{3^{2n-1}},$$
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2 \cdot 5^{n+2} - 4^{n+3}}{3^{n-1}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{10^{\frac{1}{n+1}}}.$$

Gy.2. Az s_n részletösszeg vizsgálatával határozzuk meg az alábbi sorok összegét:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2 + 3n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{-3}{n^2 + n - 2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 + 6n + 8}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

5. Gyakorlat (70)

Gy.1. Konvergens-e?

$$\sum \frac{2n+3}{4n^3-3n^2}, \quad \sum \frac{3n^2}{n^3+7n+9}, \quad \sum \frac{(3n-1)^2}{3n^2}, \quad \sum \frac{3\sqrt{n+2}-5}{n^2-1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^7+5}}.$$

Gy.2. Konvergens-e?

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \sum \frac{1}{\sqrt{n^3}}, \quad \sum \frac{1}{n \ln 2n}, \quad \sum \frac{1}{n \ln^{3/2} n}, \quad \sum \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

Gy.3. Konvergens-e?

$$\sum \left(1 \pm \frac{1}{n^2} \right)^{n^3}, \quad \sum \left(\frac{2n-1}{3n+4} \right)^n, \quad \sum \frac{n^3}{3^n}, \quad \sum \frac{3^{n+2}}{n^n}, \quad \sum \frac{2n-n^2}{n^3+3n},$$
$$\sum \frac{2^n-1}{3 \cdot 5^n-3^n}, \quad \sum \frac{2n+3}{3^n-3n^2}, \quad \sum \frac{3^{n+1}}{n!}, \quad \sum \frac{2^{n^2}}{n!}, \quad \sum \frac{n!}{3^n+2}, \quad \sum \frac{n!(n+3)}{(2n+1)!}.$$

6. Gyakorlat (65)

Gy.1. Abszolút konvergens? Feltételesen konvergens?

$$\sum (-1)^n \frac{n}{2n^3-3n}, \quad \sum (-1)^n \frac{n}{\sqrt[3]{2n^7-3n}}, \quad \sum (-1)^n \frac{2n}{n^2+5n}, \quad \sum (-1)^n \frac{2n}{n^2-5n},$$
$$\sum (-1)^n \frac{\sqrt[4]{n}}{n \sqrt[3]{n}-\sqrt{n}}, \quad \sum (-1)^n \frac{1}{n \ln n}, \quad \sum (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

Gy.2. Becsüljük meg a következő sorok összegét:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+2n-3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+2n+2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n}{2n^2-1}$$

7. Gyakorlat (70)

Gy.1. Hol konvergens?

$$\sum \frac{(x-2)^n}{n}, \quad \sum \frac{\sqrt{n}}{(x-1)^n}, \quad \sum \frac{1}{n!(x-3)^n}, \quad \sum \frac{x^n}{n5^n}, \quad \sum 3^{n^2} x^n, \quad \sum \frac{2^n}{n^2} (x+2)^n, \\ \sum \frac{n \ln n}{2n^2-1} (2x-1)^n, \quad \sum \frac{(2n-1)^n}{2^{n-1} n^n} (x+1)^n, \quad \sum \frac{(2n-1)^n}{2^{n-1} n^n} (x+1)^{2n+1}, \quad \sum \frac{2^n \sqrt{n} (3x+2)^{n-3}}{2n+1}.$$

Gy.2. Határozzuk meg az $x^3 e^{-x^2}$ függvény Maclaurin sorát, majd segítségével becsljük meg az

$$\int_0^1 x^3 e^{-x^2} dx$$

integrál értékét.

Gy.3. A megfelelő sorfejtések első 4 tagjának segítségével becsljük meg $\int_1^2 \frac{e^{-x^2}}{x} dx$ értékét.

8. Gyakorlat (65)

Gy.1. Határozzuk meg az adott függvény origó körüli hatványsorát:

$$\sqrt{1+x}, \quad \frac{1}{\sqrt{1-2x}}, \quad \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x\sqrt[3]{1-2x}, \quad \ln(1+x), \quad \arcsin x.$$

Gy.2. A megfelelő sorfejtés segítségével becsljük meg a következő értékeket:

$$\sqrt{5}, \quad \sqrt{8}, \quad \sqrt[3]{10}, \quad \ln 3/2, \quad \ln \frac{27}{8}, \quad \pi.$$

Gy.3. A binomiális sor segítségével becsljük meg az $\int_0^{1/2} \sqrt[3]{x^2+1} dx$ integrál értékét.

9. Gyakorlat (70)

Gy.1. Oldja meg: $\operatorname{sh} x = -1$, $\operatorname{ch} x = 3$. (Az egyik elég.)

Gy.2. Oldja meg: $\int \operatorname{ch} x \sin x dx$.

Gy.3. Adja meg a $\operatorname{sh} 5x$ függvény Laplace-transzformáltját.

Gy.4. Határozza meg a következő függvények Fourier-sorának első öt tagját. (1 darab)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } -\pi \leq x < 0, \\ 1, & \text{ha } 0 \leq x < \pi. \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{ha } -\pi \leq x < 0, \\ e^{-x}, & \text{ha } 0 \leq x < \pi. \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } -\pi \leq x < 0, \\ \sin x, & \text{ha } 0 \leq x < \pi. \end{cases},$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{ha } -\pi \leq x < 0, \\ \cos x, & \text{ha } 0 \leq x < \pi. \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{-\pi-x}{2}, & \text{ha } -\pi \leq x < 0, \\ \frac{\pi-x}{2}, & \text{ha } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

Gy.5. Határozzuk meg és ábrázoljuk az alábbi függvények értelmezési tartományát:

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x - y^2}}, \quad f(x, y) = \sqrt{\frac{1 - x}{1 + 2x}}, \quad f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - 2y}{1 + 2x - y}},$$

$$f(x, y) = \log(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2), \quad f(x, y) = \arcsin \frac{x}{y^2}, \quad f(x, y) = \frac{1}{\cos(x^2 + y^2)},$$

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{y^2 - x + 1}{2 - y^2 - x^2}}, \quad f(x, y) = \log \frac{y + 2 - 3x}{x + 1 - y^2}$$

10. Gyakorlat (65)

Gy.1. Határozzuk meg a következő határértékeket:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} \frac{xy + y + 6x + 6}{xy - 4x + y - 4}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-2)} \frac{xy - 4y + 2x - 8}{xy + 2x + 3y + 6}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (3,0)} \frac{\sin xy}{4y},$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x - y}{x + y}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4},$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty,3)} \frac{x - 1}{1 - y}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (2,\infty)} \frac{xy + 2x - 3y + 1}{yx + x^2},$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow P} \frac{x + y}{\sqrt{x^2 y - y}}, \quad P: (0, 0), (\infty, 3), (-2, -\infty), (1/2, -\infty), (-\infty, \infty)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow Q} \frac{3xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad Q: (0, 0), (3, -\infty), (\infty, \infty)$$

Gy.2. Definíció szerint és formálisan is határozzuk meg az alábbi függvények adott pontbeli parciális deriváltjait.

$$f(x, y) = x^2 y^3, \quad P(0, 1); \quad f(x, y) = 2x^2 - 3xy, \quad P(1, -2); \quad f(x, y) = \sqrt{x^2 - y}, \quad P(1, -2)$$

Gy.3. Határozzuk meg az $f(x, y) = 2x^{2y} - e^{\sqrt{1-y^2} \ln x}$ függvény totális differenciálját és gradiens vektorát.

Gy.4. Határozzuk meg:

$$f(x, y, z) = x e^{xy} - y \ln z, \quad f'''_{xyz} = ?; \quad f(x, y) = x \arctan z^y, \quad f'''_{xyz} = ?.$$

11. Gyakorlat (70)

Gy.1. Definíció szerint és formálisan is határozzuk meg az alábbi függvények iránymenti deriváltját az adott pontban, az adott irányban.

- $f(x, y) = xy^2, \quad P(2, 3), \quad \mathbf{u}(1, -2);$
- $f(x, y) = \frac{x}{y^2 + 1}, \quad P(0, 1), \quad \mathbf{u}(-3, 1);$
- $f(x, y) = \sqrt{x + y^2}, \quad P(2, 1), \quad \mathbf{u}(1, -3);$
- $f(x, y) = \sqrt{1 - xy}, \quad P(-1, 2), \quad \mathbf{u}(-3, 4).$

Gy.2. Határozzuk meg az $f(x, y) = x^2 e^y - \cos xy$ függvény iránymenti deriváltját a $P(2, 0)$ pontban, az $u(3, -1)$ irányban.

Gy.3. Határozzuk meg a következő függvények szélsőértékeit.

- a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + 3x + 3y$;
- b) $f(x, y) = \frac{3}{4}y^2 + \frac{1}{24}y^3 - \frac{1}{32}y^4 - x^2$;
- c) $f(x, y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 8x^2 - 8y^2$;
- d) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

12. Gyakorlat (65)

Gy.1. Határozzuk meg az $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + 3x - 3y$ függvény szélsőértékeit az $x + y = 2$ egyenletű egyenesen.

Gy.2. Határozzuk meg az $f(x, y) = ye^{x+3}$ függvény szélsőértékeit a $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ pontok által meghatározott zárt négyszögon.

Gy.3. Határozzuk meg az $f(x, y) = x^3 - 2xy + y^3$ szélsőértékeit a $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(-1, 2)$, $(1, 2)$ pontok által kijelölt zárt négyszögon.

Gy.4. Határozzuk meg az $f(x, y) = x + y + 2$ függvény $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 1$ feltétel melletti szélsőértékeit.

13. Gyakorlat (70)

Gy.1. Oldjuk meg az alábbi (egzakt) differenciálegyenleteket:

- a) $(4x^3 + y)dx + (2y + x)dy = 0$, $y(0) = 1$;
- b) $2xe^y + \frac{1}{x} + (x^2e^y + 2y)y' = 0$, $y(1) = 0$;
- c) $e^x(x + 1) - y \sin x + \cos xy' = 0$.

Gy.2. Határozzuk meg az alábbi vonalintegrálokat:

- a) $\int_L (x - y)dx + \frac{x}{y + 1}dy$, ahol L az $(1, 2)$ és $(-1, 3)$ pontokat összekötő szakasz;
- b) $\int_L yxdx - ydy$, ahol L a $(2, 1)$, $(0, -3)$, $(2, -3)$ pontokat összekötő szakasz;
- c) $\int_L 2xydx + x^2dy$, ahol L a $(4, 1)$, $(0, -3)$, $(1, 3)$, $(4, 2)$ pontokat összekötő szakasz;
- d) $\int_L \ln(x + 2)dx - xdy$, ahol L a $(2, 2)$, $(-1, 1)$ pontokat összekötő szakasz;
- e) $\int_L x^2dx - dy$, ahol L az $O(0, 1)$ középpontú egységsugarú körvonal $A(-1, 1)$, $B(0, 0)$ pontjait negatív irányban összekötő körív;
- f) $\int_L x^2dx - (x + 3)ydy$, ahol L az $O(0, 1)$ középpontú egységsugarú körvonal $A(-1, 1)$, $B(0, 0)$ pontjait negatív irányban összekötő körív.

14. Gyakorlat (65)

Gy.1. Ábrázoljuk az integrálási tartományt, majd cseréljük föl az integrálási sorrendet:

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x f(x, y) dy dx, \quad \int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} f(x, y) dy dx, \quad \int_1^2 \int_{\frac{1-2x}{x}}^{\ln x} f(x, y) dy dx.$$

Gy.2. Számítsuk ki:

- $\int_1^2 \left(\int_{1-2x}^{x+1} (x-y) dy \right) dx;$
- $\int \int_H (x-y) dx dy$, ahol H a $(2, 1), (4, 1), (7, -2)$ pontok által meghatározott háromszög;
- $\int \int_A x \sin xy dx dy$, ahol A az $x = 0, x = \pi/2, y = 0$ és $y = 1$ egyenletű egyenesek által határolt téglalap;
- $\int \int_A e^{x/y} dx dy$, ahol A az $x = 0, y = 1$ és az $y^2 = x$ egyenletű görbék által határolt síkrész;
- $\int \int_H \frac{2xy}{x+5} dx dy$, ahol H a $(0, 1), (3, 1), (1, -1)$ pontok által határolt háromszög.

15. Gyakorlat (70)

Gy.1. Számítsuk ki: (A lényeg, hogy mindenre legyen egy példa, nem feltétlen kell mindnek külön feladat.)

$$(2+3i) + (5-i), \quad 2+3i + \overline{(5-i)}, \quad 2+3i + \operatorname{Im}(5-i), \quad (2+3i) + |5-i|, \\ 3(5-i), \quad i(5-i), \quad (2+3i) \cdot (5-i), \quad (2+3i) \div (5-i).$$

Gy.2. Számítsuk ki:

- $(1+i)^{17}, \quad (\sqrt{3}+i)^{14};$
- $\sqrt[3]{8}, \quad \sqrt{-1-\sqrt{3}i}, \quad \sqrt[3]{-1-i}.$

Gy.3. Határozza meg a következő sorozatok határértékét.

$$z_n = \frac{n+1}{2n+3} + \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+3}}i \quad z_n = \frac{n^2+1}{2n+3} + \frac{\sqrt{n+1}}{n+3}i$$

Gy.4. Vizsgáljuk meg a következő sorok konvergenciáját:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (i+1)^n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{-n}}{n^3}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-i)^n}{n!} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i+1)^n}{2^{n/2}n^2}.$$

16. Gyakorlat (65)

Gy.1. Ábrázoljuk a következő függvénysorok konvergenciatartományát:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \sqrt{n+1}}{2n^2-1} (z+5-i)^{n-1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2+i)^n}{n^2+1} (z-i)^{n-1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{(1-i)^n n^2} (2z+i)^{2n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2z+3-i)^{n-2}}{5^n \sqrt{2n-1}}.$$

Gy.2. Számítsuk ki:

- $\ln(-1), \quad \ln(3i), \quad 2^i, \quad (\sqrt{3}+i)^{14};$
- $\operatorname{ch}(i\pi) - \operatorname{sh}(i\pi/3), \quad \operatorname{sh}(i\pi/2) - \operatorname{ch}(i\pi/6).$

Gy.3. Oldjuk meg (tetszés szerint 1-2-t): $e^z = 3i, \quad e^{iz} = -1, \quad z^7 = -1-i, \quad \operatorname{ch} z = -2.$

17. Gyakorlat (70)

Gy.1. Hol differenciálható?

$$f(z) = \operatorname{Re} z, \quad f(z) = |z|^2$$

Gy.2. Számítsuk ki:

- a) $z(t) = 3 - 2it + 5e^{it}$, $z'(t) = ?$
- b) $z(t) = 2 - 3t^2 + i(2t^3 - t)$, $z'(t) = ?$
- c) $z(t) = 1 + 2 \cos t + i(2 \sin t - 3)$, $z'(t) = ?$
- d) $\int_0^{2\pi} e^{it} dt$, $\int_0^{\pi} e^{-it} dt$, $\int_0^1 3t(1 - 3i) dt$.

Gy.3. Igazoljuk, hogy $u(x, y) = 5x^2 + 4xy - 5y^2$ harmonikus, és keressük meg a harmonikus társát.

Gy.4. Igazoljuk, hogy $u(x, y) = e^x \cos y$ harmonikus, és keressük meg a harmonikus társát.

18. Gyakorlat (65)

Gy.1. Határozzuk meg a következő komplex vonalintegrálokat:

- a) $\int_L (\bar{z} + z - 2i) dz$, ahol L az $A = i$, $B = -1$ pontokat összekötő origó középpontú negyedkörív, és a $B = -1$, $C = -i$ pontokat összekötő szakasz;
- b) $\int_L (e^z + 1 - i) dz$, ahol $L = \gamma_{0,1}^+$, $-1 \rightarrow 1$;
- c) $\int_L (\operatorname{Im} z + \operatorname{sh}(2iz - 3)) dz$, ahol L a $B = 0$, $C = 1 - i$ pontokat összekötő szakasz, és a $C = 1 - i$, $B = -2$ pontokat összekötő $2 - i$ középpontú negyedkörív;
- d) $\int_L (\operatorname{Re} z - 2i) z dz$, ahol L a $\gamma_{1+i,2}^+$ kör $z_1 = 3 + i \rightarrow z_2 = 1 - i$ pontját összekötő szakasz.

19. Gyakorlat (70)

Gy.1. A Cauchy-féle integrálformula segítségével oldjuk meg:

$$\oint_C \frac{\cos z}{z} dz, \quad C: \gamma_{0,1}^+; \quad \oint_C \frac{z^2 - 4z + 4}{z + i} dz, \quad C: \gamma_{0,2}^+; \quad \oint_C \frac{z}{z^2 + 9} dz, \quad C: \gamma_{2i,4}^+;$$

$$\oint_C \frac{z^2 - 2iz}{(z + i)^2} dz, \quad C: \gamma_{0,2}^+; \quad \oint_C \frac{z + 1}{z^4 + 4z^3} dz, \quad C: \gamma_{0,1}^+.$$

Gy.2. Reziduúmtétellel oldja meg:

- a) $\int_G \frac{z + 3i}{z^2 + 1} dz$, $G: 1 + 2i \rightarrow -1 + 2i \rightarrow -1 - 2i \rightarrow 1 - 2i$ zárt görbe
- b) $\int_G \frac{2z + 3i}{z^4 + 16} dz$, $G: \gamma_{-1+i,3}^-$
- c) $\int_G \frac{3z - 2i + 1}{z^2 - 6z + 10} dz$, $G: \gamma_{3+i,1}^+$

20. Gyakorlat (65)

Gy.1. Fejtse Laurant-sorba a megadott f függvényt a z_0 pont körül.

- a) $f(z) = \frac{z+3i}{z^2+1}, \quad z_0 = -i$
- b) $f(z) = \frac{1-i}{z^3-i}, \quad z_0 = 0$
- c) $f(z) = \frac{z-i}{z^3+8}, \quad z_0 = 1-i$

Gy.2. Határozza meg az integrált Laurant-sorba fejtéssel.

- a) $\int_G \frac{2z+3i}{z^4+16} dz, \quad G: \gamma_{-1+i,3}^-$
- b) $\int_G \frac{3z-2i+1}{z^2-6z+10} dz, \quad G: \gamma_{3+i,1}^+$

21. Gyakorlat (70)

Gy.1. Adja meg a következő függvények komplex Fourier-sorát.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } -\pi \leq x < 0, \\ 1, & \text{ha } 0 \leq x < \pi. \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} -x, & \text{ha } -\pi \leq x < 0, \\ x, & \text{ha } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } -\pi \leq x < 0, \\ 0, & \text{ha } 0 \leq x < \pi. \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{ha } -\pi \leq x < 0, \\ e^{-x}, & \text{ha } 0 \leq x < \pi. \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{ha } -\pi \leq x < 0, \\ 0, & \text{ha } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

Gy.2. Határozza meg a következő függvények Fourier-transzformáltját. Ez a rész ki lett szedve a tananyagból, csak néhány szót beszéljünk róla, hogy kell elképzelni. Például, azt, hogy olyan, mint egy „nagyon hosszú” periódus.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0 \\ 1, & \text{ha } 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{ha } 1 \leq x \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } -1 \leq x < 1 \\ 0, & \text{ha } x < -1 \text{ vagy } 1 \leq x \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{ha } x < 0 \\ e^{-x}, & \text{ha } 0 \leq x \end{cases}$$

22. Gyakorlat (65)

Gy.1.

- a) Hány különböző kimenetele van annak kísérletnek, hogy feldobunk két szabályos dobókockát? Mennyi annak a valószínűsége, hogy
 - 1.) két egyenlő számot dobunk;
 - 2.) két különböző számot dobunk;
 - 3.) a dobott számok összege 7;
 - 4.) legalább az egyik kockán 6-ost dobunk;
 - 5.) a dobott számok összege 7, és az egyik dobás eredménye 6-os?
- b) Feldobunk 6 dobókockát. Mekkora valószínűséggel lesz a dobott számok összege pontosan 36? Mennyi az esélye, hogy a dobott számok összege nagyobb, mint 34? Mekkora a valószínűsége annak, hogy a dobott számok között vannak azonosak?

- c) Hányszor dobjak fel egy szabályos pénzérmét, ha az a célom, hogy a dobások között 90% valószínűséggel legyen fej?
- d) Hányszor dobjak fel egy szabályos dobókockát, ha az a célom, hogy a dobások között 90% valószínűséggel legyen hatos?
- e) Visszatevéssel húzunk egy olyan urnából, melyben 3 piros és 5 zöld golyó található.
 - 1.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első piros golyót harmadikra húzzuk ki? Mennyi az esélye, hogy az n -edik húzásra kapjuk az első pirosat?
 - 2.) Mennyi annak az esélye, hogy három húzás során kapunk legalább egy pirosat? Mi annak a valószínűsége, hogy n húzásból kapunk pirosat?
 - 3.) Hányat húzzunk, ha az a célunk, hogy 95 százalékos valószínűséggel a kihúzott golyók között legyen piros?
- f) Rózsa néni nagyon szereti a kertjét, és különösképpen a tulipánjait. Ősszel a legszebb tulipánok közül kiválaszt 5 pirosat, 4 narancssárgát és 2 fehérét, és felszedi a hagymákat. Sajnos a hagymák a téli tárolás során összekeverednek. A következő tavasszal Rózsa néni véletlenszerűen kiválaszt 5 hagymát, és kiülteti őket. Mennyi az esélye annak, hogy a kiválasztott hagymák között
 - 1.) pontosan 1 fehér lesz;
 - 2.) pontosan 2 piros lesz;
 - 3.) lesz fehér?

Gy.2. Tekintsük azt a véletlen kísérletet, hogy feldobunk egy szabályos dobókockát.

- 1.) Mely kimenetek esetén következnek be az alábbi események?
 A = páros számot dobunk;
 B = ötnél kisebbet dobunk;
 C = hétnél nagyobbat dobunk;
 D = pozitív számot dobunk;
- 2.) Fogalmazzuk meg szavakkal és írjuk fel halmazelméleti műveletekkel a következő eseményeket: A és B ; A vagy B ; A igen, de B nem; nem A . A megoldást illusztráljuk Venn-diagrammal is.

Gy.3. Legyen $P(A) = 0,7$ és $P(B) = 0,8$. Ezen információ birtokában meg tudjuk határozni egyértelműen a $P(A \cap B)$ és a $P(A \cup B)$ valószínűséget? Ha nem, akkor adjunk alsó és felső korlátot ezekre a valószínűségekre. Illusztráljuk Venn-diagrammal, hogy a kapott eredmények mikor teljesülnek egyenlőséggel.

23. Gyakorlat (70)

Gy.1. Próbagyártás után két szempontból vizsgáljuk a késztermékeket. Tudjuk, hogy 0,25 annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott termék anyaghibás, míg 0,4 annak az esélye, hogy mérethibás. A gyártmányok 10 százaléka nem felel meg egyik szabványnak sem. Ha véletlenszerűen kiválasztunk egy terméket, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy

- 1.) a termék anyaghibás, de megfelel a méretszabványnak;
- 2.) a kiválasztott terméknek van valamilyen hibája;
- 3.) a terméknek pontosan egyfajta hibája van;
- 4.) a termék hibátlan?

Gy.2. Egy cég három különböző típust szállít egy adott termékből a vele szerződésben álló boltoknak. Ebben a hónapban a boltok fele rendelt az 1. típusból, míg 57% nem rendelt a 2. típusból. A boltok 22%-a rendelt az 1. és a 2. típusból is, továbbá negyedrészüket az 1. és a 3. típusú termékekből is. Tudjuk, hogy a boltok 14%-a mindegyik típusból rendelt, míg 0,12 részük egyikből sem. A boltok 6%-a rendelt a 2. és 3.

típusból, de az 1.-ből nem. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott boltba kell szállítani a 3. típusból? A boltok hányad része rendelt csak az 1. típusból? Egy véletlenszerű bolt esetén mennyi az esélye, hogy pontosan egy típust rendeltek a termékből?

Gy.3. Egy edénygyár egy napi tényértermelését a következő táblázat foglalja össze:

	leveses	lapos	salátás	összesen
hibátlan	470	540	380	1390
selejtes	30	60	20	110
összesen	500	600	400	1500

Véletlenszerűen kiválasztunk egy terméket minőségellenőrzésre. Jelölje A_i azt az eseményt, hogy az i -edik típusú termékből választottunk, és legyen B az az eseményt, hogy a kiválasztott termék selejtes. Értelmezzük és határozzuk meg a következő valószínűségeket: $P(A_2|B)$; $P(A_1 \cup A_3|\overline{B})$; $P(B|A_2)$; $P(B|\overline{A_2})$.

Gy.4. Rózsa néni véletlenszerű sorrendben elültet egymás mellé 3 piros és 2 narancssárga tulipánt. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a sor valamelyik végére sárga tulipán kerül? Mennyi az esélye ugyanennek, ha a két sárga tulipán egymás mellé kerül?

Gy.5. Az oktaéder egy olyan szabályos test, melynek 8 lapja van. Beszámozzuk a lapokat 1-től 8-ig, és kapunk egy dobóoktaédert. Ha egyszer dobunk, akkor az alábbi események közül melyek függetlenek?

A = párosat dobunk; B = prímszámot dobunk; C = 3-nál nagyobbat dobunk.

Gy.6. Egy csomagolóüzembe négy termelő szállít almát. A leadott gyümölcs tizede származik az első, három tizede a második, és két ötöde a harmadik termelőtől. Az egyes termelők esetén a leadott mennyiség 40, 50, 20 illetve 100 százaléka elsőosztályú. Ha véletlenszerűen kiválasztunk egy almát, akkor mi annak a valószínűsége, hogy az alma elsőosztályú? Feltéve, hogy az alma másodosztályú, mennyi a valószínűsége, hogy a harmadik termelő szállította be?

Gy.7. A hűtőben négy doboz tej van, ezek között van egy friss, egy egy hete lejárt, ami biztosan romlott, és van két doboz, ami egy napja járt le, ezek 0,3 valószínűséggel romlottak. Véletlenszerűen kiválasztunk egy doboz tejet. Mekkora az esélye, hogy ez a tej nem romlott? Ha megkóstoljuk a kivett tejet, és az romltnak bizonyul, akkor mi a valószínűsége annak, hogy az egy hete lejárt tejet vettük ki?

Gy.8. Egy üzemben három gép van, az első adja a termelés felét, a második a 40%-át. Az első és a második gépnél is a termékek 3%-a selejtes. A harmadik gép esetében hány százalék a selejtarány, ha tudjuk, hogy az üzemben termelt selejtes termékek közül 32,5% készült a harmadik gépnél?

Gy.9. Egy vizsgán a hallgatók 10%-a bukott meg. A sikeres vizsgát tevő hallgatók negyedrésze kapott jelest. Mekkora az esélye, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott hallgató jelest kapott?

24. Gyakorlat (65)

Gy.1. Egy 20 fős gyakorlaton a kalkulus jegyek eloszlását az alábbi táblázat mutatja.

jegyek	1	2	3	4	5
darab	8	4	2	3	3

Írja fel a jegyek várhatóértékét, szórását. Ábrázolja a valószínűségek eloszlását.

Gy.2. Felajánlanak nekünk egy játékot. Befizetünk 5000 forintot. Van 2 kupac boríték, mindegyik kupacban 4-4 darab boríték. Mindegyik borítékban van egy összeg. Ki kell választanunk egy kupacot, és abból a kupacból egy borítékot, és a benne szereplő összeget megnyerjük. Megéri-e nekünk ezt a játékot játszani, ha a következő összegek vannak a borítékokban.

1. kupac	1000	3000	6000	8000
2. kupac	2000	2000	4000	10000

Melyik kupacot válasszuk?

Gy.3.

- Jelölje X egy dobókocka feldobásakor kapott számot. Adjuk meg az X változó eloszlását, eloszlásfüggvényét, várható értékét és szórását.
- Két szabályos dobókockát feldobva legyen X a dobott számok maximuma. Adjuk meg az X változó eloszlását, eloszlásfüggvényét, várható értékét és szórását.

Gy.4. Feldobok 5 szabályos dobókockát. Mennyi a dobott számok összegének várható értéke és a szórása?

Gy.5. Addig dobok fel két szabályos dobókockát újra és újra, míg duplát nem kapok. Mennyi annak az esélye, hogy az első duplát az ötödik dobásra kapom? Mi a valószínűsége annak, hogy ötnél több dobás kell majd? Várhatóan hanyadik dobásra kapom majd az első duplát?

Gy.6.

- Tegyük fel, hogy egy adott percben egy szerverhez beérkező igények száma Poisson eloszlást követ. Egy perc alatt átlagosan 10 igény érkezik. Mekkora a Poisson-eloszlás paramétere? Mennyi a valószínűsége, hogy egy perc alatt több, mint 13 igény érkezik. Mennyi a valószínűsége, hogy 1 perc alatt a beérkező igények száma 5 és 8 között van. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy adott órában nem érkezik lekérdezés?
- Az előző eset feltevését figyelembe véve tudjuk, hogy az igények érkezése közötti idő exponenciális eloszlást követ. Mekkora a beérkezések között eltelt idő várható értéke? Mennyi a valószínűsége annak, hogy két beérkezés között legalább 6 másodperc telik el? Mennyi a valószínűsége, hogy a beérkezések között eltelt idő 1 és 2 másodperc között van?

Gy.7. Egy gyárban egy nap alatt 50 terméket készítenek, ebből 15 selejtes. Minőségellenőrzéskor véletlenszerűen kivesszünk egyszerre 5 terméket, és megvizsgáljuk őket. Jelölje X a mintában talált selejtes termékek számát. Határozzuk meg az X valószínűségi változó eloszlását és várható értékét. Mennyi annak az esélye, hogy legfeljebb egy selejtes termék lesz a mintában?

Gy.8. Hatszor feldobunk egy dobókockát. Jelölje X azt, hogy hányszor kaptunk páratlan számot. Határozzuk meg X eloszlását, várható értékét, szórását. Mennyi annak a valószínűsége, hogy 10 dobásból pontosan annyi páratlan értéket kapok, mint páratlant.

25. Gyakorlat (70)

Gy.1. Milyen a érték esetén lesz az alábbi f függvény egy X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye? Mi az X változó értékkészlete, illetve mekkora a $P(2 \leq X \leq 5)$ és a $P(X > 4)$ valószínűség? Határozzuk meg az X és az X^3 várhatóértékét és szórását.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2, & -10 \leq x \leq 10, \\ 0, & \text{különben;} \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} a/x, & 1 \leq x \leq 5, \\ 0, & \text{különben;} \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} a/x^3, & x \geq 3, \\ 0, & x \leq 3; \end{cases}$$

Gy.2. A TESCO-ban a narancsot a minőségtől függően változó áron árulják. Feltehető, hogy az ár egyenletes eloszlást követ 200 és 400 forint között.

- 1.) Jelölje az X változó egy kilogramm narancs árát. Adjuk meg X sűrűségfüggvényét és várhatóértékét.
- 2.) Tegyük fel, hogy a narancsot kilós kiszerezésben árulják, és jelölje Y azt, hogy 1000 forintból hány kiló narancsot tudunk megvásárolni. Adjuk meg Y eloszlását és várható értékét. (A kiszerezés miatt csak egész kilogrammokat tudunk vásárolni!)
- 3.) Tegyük fel, hogy a narancs nem kilós kiszerezésű, tehát nem csak egész kilogrammokat, hanem tetszőleges mennyiséget megvásárolhatunk. Jelölje Y ismét azt, hogy hány kiló narancsot tudunk vásárolni 1000 forintból. Mennyi annak az esélye, hogy az Y változó értéke 3 és 4 közé esik? Határozzuk meg Y várható értékét és szórását. Írjuk fel az Y változó eloszlás- és sűrűségfüggvényét.

Gy.3. Egy műszaki berendezés élettartama exponenciális eloszlást követ, a berendezések átlagos élettartama 5 év. Mennyi annak az esélye, hogy a berendezés kibír 1 évet? Mennyi annak az esélye, hogy egy 100 éves berendezés kibír még egy évet?

Gy.4.

- a.) Az IQ tesztek úgy állítják össze, hogy az eredmény a felnőtt populáción belül normális eloszlást kövessen 100 pont várható értékkel és 15 pont szórással. A népességen belül az emberek mekkora hányada rendelkezik 145 pont feletti IQ értékkel? Mondjunk egy olyan intervallumot, melyre teljesül, hogy közelítőleg az emberek 95 százalékának ebbe az intervallumba esik az IQ pontszáma.
- b.) Magyarországon az emberek testtömege normális eloszlást követ 80 kg várható értékkel és 20 kg szórással. Az emberek mekkora hányadának esik a testtömege 60 és 90 kg közé? Adjunk meg egy olyan intervallumot, melyre teljesül, hogy az emberek 95 százalékának a testtömege esik bele ebbe az intervallumba.
- c.) Angol tudósok azt vizsgálták, hogy a szavannán élő majmok reggelente milyen eloszlás szerint ébrednek fel, és másznak le a fáról. A megfigyelések alapján azt találták, hogy az ébredési idő egy olyan valószínűségi változó, mely normális eloszlást követ 7 óra várható értékkel és 30 perc szórással. (Valós kutatás alapján.) Határozzuk meg a normális eloszlás paramétereit, tehát az ébredési időpont várható értékét és szórását. A majmok mekkora hányada kel fel 8 óra után? Adjunk meg egy olyan időintervallumot, melyre teljesül, hogy a majmok 90 százaléka ebben az időintervallumban mászik le a fáról.
- d.) Feldobok 500 szabályos dobókockát. Mennyi a kapott hatosok számának várható értéke és szórása? Mennyi annak a valószínűsége, hogy 100-nál több hatost kapok? Adjunk meg egy olyan intervallumot, melyre teljesül, hogy a hatosok száma 95% valószínűséggel ebbe az intervallumba esik?
- e.) Egy teherlift maximum 9800 kilogrammot tud mozgatni. Egy teherautóban 49 doboznyi rakományát ezzel a lifttel akarjuk szállítani. A tapasztalatok alapján egy doboz tömegének várható értéke 205 kg, szórása 15 kg. Mi a valószínűsége, hogy egyszerre el tudjuk a lifttel szállítani az összes dobozt?
- f.) A tapasztalatok alapján a kassza sorában álló szurkolók a Fradi-Újpest meccsre átlagosan 2,4 jegyek vesznek, 2 szórással. Tegyük fel, hogy a meccs előtt néhány órával 100 szurkoló van a sorban, aki jegyek akar venni. Ha csak 250 jegy maradt, mennyi a valószínűsége, hogy mind a 100 szurkolónak jut annyi jegy, amennyit szeretne venni?
- g.) Van egy 100 adatból álló adatsorunk, melynek várható értéke 500 és szórása 80. Mennyi a valószínűsége, hogy a minta átlaga a (490,510) intervallumba esik?
- h.) Egy munkahelyen a dolgozók ásványvízfogyasztásának várható értéke 19 uncia, szórása 5 uncia. A cég a dolgozóinak minden nap 2000 uncia ásványvizet rendel. A cégnek 100 alkalmazottja van. Mekkora a valószínűsége, hogy a cég nem tudja fedezni a dolgozók vízszükségletét?

26. Gyakorlat (65)

Gy.1. Vegyes, hosszabb, összetettebb feladatok valószínűségszámításból, az előző 4 gyakorlat anyaga alapján.

Puska

$$\begin{aligned}\int x^\alpha dx &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, \\ \int \cos x dx &= \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C, \\ \int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C, \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin x + C = -\arccos x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L[f](p) &:= \int_0^\infty f(x)e^{-px} dx, \quad L[e^{ax}f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[xf(x)](p) = -L'[f(x)](p), \quad L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}}, \\ L[\cos ax](p) &= \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2}, \quad L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2L[y] - py(0) - y'(0),\end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} (-1)^n a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \frac{1}{2}a_k + \int_k^\infty f(x)dx.$$

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \\ a_n &:= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx\end{aligned}$$

$$z = x + iy, \quad f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad u'_x = v'_y, \quad -u'_y = v'_x, \quad u''_{xx} + u''_{yy} = 0$$

$$\begin{aligned}\int_L f(z)dz &= \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt \\ f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z)dz.\end{aligned}$$

$$c_k := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx} dx, \quad \hat{f}(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad \hat{F}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx$$