Kedd 18-tól A csoport

(1.) Def: Az f függvény differenciálhányadosa az x_0 pontban: $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

A deriváltfüggvény az f függvény x_0-pontjába húzott érintőjének ~~egyen~~ meredekségét adja meg. Az érintő egyenlete az x_0 pontban: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, azaz

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

(2.)

300 mg	25%
x	80%
300+x	50%

← 80%-os oldat kell hozzá!

$$(300+x) \cdot 50 = 80 \cdot x + 25 \cdot 300$$

$$15000 + 50x = 80x + \cancel{5000}\ 7500$$

$$7500 = 30x$$

$$\underline{\underline{x = 150}}$$

150 mg kell a 80%-os oldatból!

(3.) $$\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1} = \frac{2x+1-(2x-1)}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{\cancel{2x}+1-\cancel{2x}+1}{4x^2-1} = \underline{\underline{\frac{2}{4x^2-1}}}$$

$$\sqrt{12\sqrt[3]{27}} = \sqrt{12 \cdot 3} = \sqrt{36} = \underline{\underline{6}} \qquad \log_2\left(2^{3y+1}\right) = (3y+1)\log_2 2 = \underline{\underline{3y+1}}$$

(4.) $P = (-1, 3)$
$Q = (3, 4)$

Meredekség: $m = \frac{4-3}{3-(-1)} = \underline{\frac{1}{4}}$.

Behelyettesítem Q-t:

$$4 = \frac{1}{4} \cdot 3 + b$$

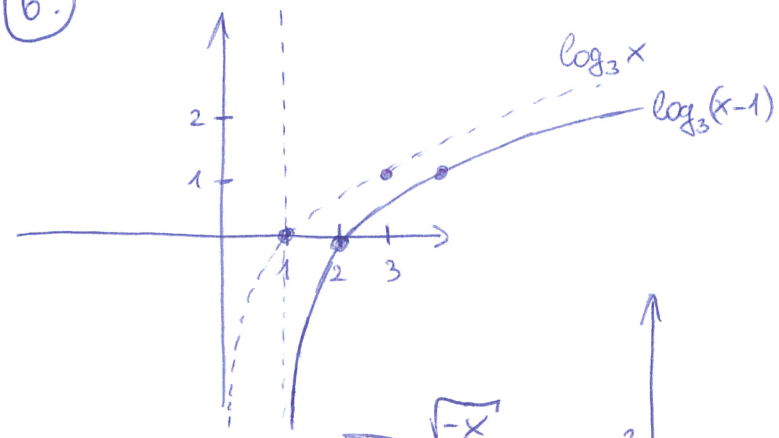
$$4 = \frac{3}{4} + b$$

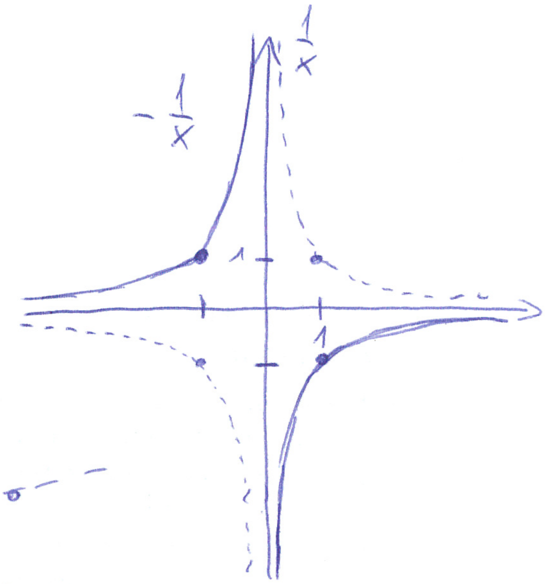
$$b = 4 - \frac{3}{4} = \frac{16}{4} - \frac{3}{4} = \underline{\frac{13}{4}}$$

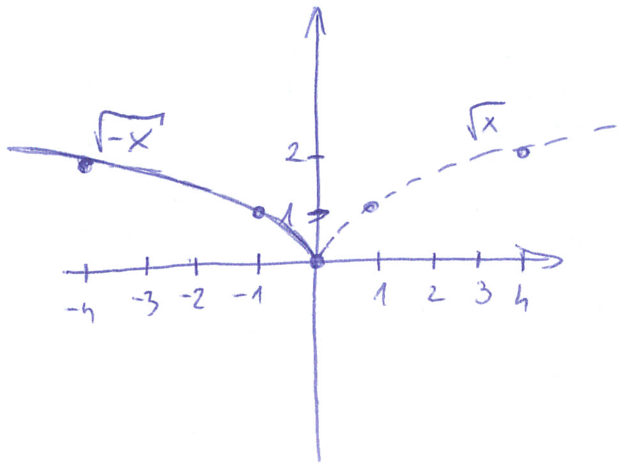
Egyenlet: $\underline{\underline{y = \frac{1}{4}x + \frac{13}{4}}}$

(5.) $$y = x^2 - 6x + 7 = \underbrace{(x-3)^2}_{x^2-6x+9\ \checkmark} - 9 + 7 = \underline{\underline{(x-3)^2 - 2}}$$

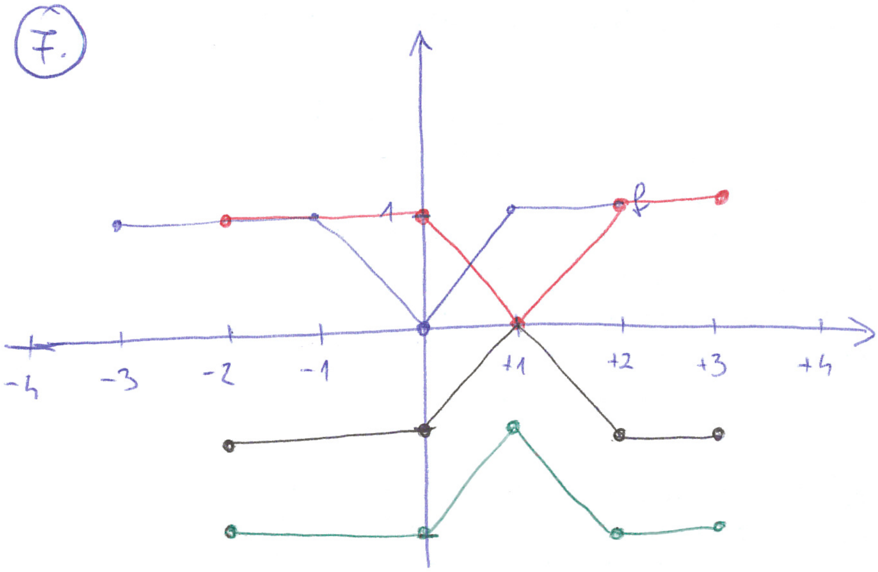
6.







7.

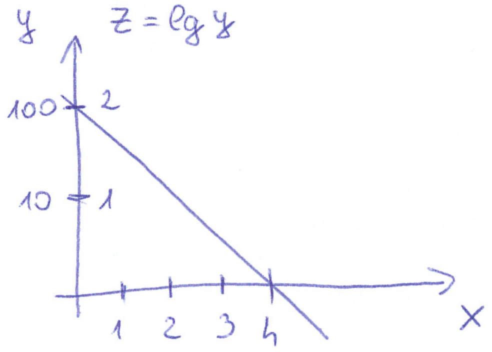


Sorrend: $f(x-1)$

$-f(x-1)$

$-f(x-1)-1$

8.



z-ben és x-ben: $z = -\frac{1}{2}x + 2$

y-ban és xben: $\lg y = -\frac{1}{2}x + 2$

$$y = 10^{-\frac{1}{2}x+2}$$

$$y = 100 \cdot 10^{-\frac{1}{2}x}$$

9. $f(x) = 3 \cdot 2^{-5x}$ $f(T) = 3 \cdot \frac{1}{2}$

$f(0) = 3 \cdot 1 = 3$

$f(T) = \cancel{3} \cdot 2^{-5T} = \cancel{3} \cdot \frac{1}{2}$

$2^{-5T} = 2^{-1} \Rightarrow -5T = -1 \Rightarrow T = \frac{1}{5}$

(10.)

• $$\Big(\pi - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{x^{-\frac{1}{2}}} - 2\log_3 x + 2^x\Big)' = 0 - \left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} - 2\cdot\frac{1}{x\ln 3} + 2^x\cdot\ln 2$$
$$= \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{2}{x\ln 3} + 2^x\cdot\ln 2$$

• $$\left(\frac{x-\cos x}{\ln x}\right)' = \frac{(1+\sin x)\ln x - (x-\cos x)\frac{1}{x}}{\ln^2 x}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \qquad f' = 1-(-\sin x) = 1+\sin x$$
$$g' = \frac{1}{x}$$

• $$\sqrt{x^5 e^{2x}} = (*)$$

$f = \sqrt{x}$ $\qquad f' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$g = x^5 e^{2x}$ $\qquad g' = 5x^4\cdot e^{2x} + x^5\cdot e^{2x}\cdot 2$

$$\left[f(g(x))\right]' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

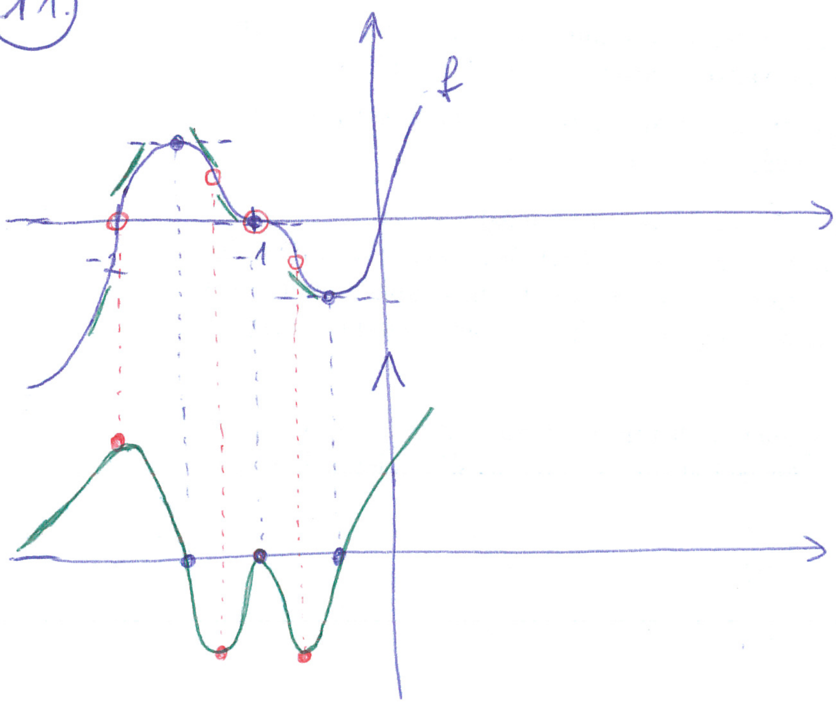
$$(*) = \frac{1}{2\sqrt{x^5e^{2x}}}\cdot\left(5x^4e^{2x} + 2x^5e^{2x}\right)$$

Másik megoldás:

$$\sqrt{x^5e^{2x}} = \sqrt{x^5}\cdot\sqrt{e^{2x}}$$
$$= x^{\frac{5}{2}}\cdot e^x$$
$$\left(x^{\frac{5}{2}}\cdot e^x\right)' = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}e^x + x^{\frac{5}{2}}\cdot e^x$$

Ez a kettő ugyanaz!!!

(11.)



-•- : Ahol a függvénynek szélsőértéke van, vagy "ellaposodik" ott a deriváltja nulla.

o: Ahol az f-nek inflexiós pontja van, ot veszi fel a derivált a szélsőértékeit.

/ vagy \ : A függvény érintőjének meredeksége dönti el, hogy ⊕ vagy ⊖ a derivált fgv.

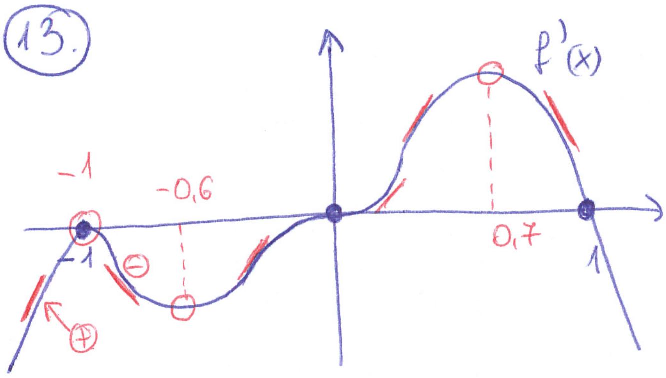
12 $f(x)=\sqrt[3]{x}-\ln x+x \qquad x_0=1$

Érintő: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ $\qquad f(x_0)=1-0+1=\underline{2}$

$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{x}+1 \qquad f'(x_0)=\frac{1}{3}-1+1=\underline{\underline{1/3}}$

$\to y=\frac{1}{3}\cdot(x-1)+2=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}+2=\underline{\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}}$

13.



• : Ahol a derivált nulla, ott az f fgvnek lehetséges szélsőértéke van:

		-1		0		1	
f':	−	0	−	0	+	0	−
f:	↘	↑	↘	↑	↗	↑	↘
		Nincs sz. é.		MIN		MAX	

⊙: Ahol az f'-nek sz.é-e van, ott az f-nek inflexiós pontja van.

		-1		-0,6		0,7	
f''	+	0	−	0	+	0	−
f	∪	↑	∩	↑	∪	↑	∩
		IP		IP		IP	

14. $f(x)=6x^4-8x^3+2$

Monotonitás, szélő érték

$f'(x)=24x^3-24x^2=24x^2(x-1)$

$f'=0 \iff x=0$ vagy $x=1$

	$x<0$	$x=0$	$0<x<1$	$x=1$	$x>1$
f'	−	0	−	0	+
f	↘	X	↘	MIN	↗

$f'(-1)=24\cdot 1\cdot(-2)=\ominus$

$f'\left(\frac{1}{2}\right)=24\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\ominus$

$f'(2)=24\cdot 4\cdot 1=\oplus$

Konvexitás, inflexiós pontok

$f''=72x^2-48x=24x(3x-2)$

$f''=0 \iff x=0$ vagy $x=\frac{2}{3}$

	$x<0$	$x=0$	$0<x<\frac{2}{3}$	$x=\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}<x$
f''	+	0	−	0	+
f	∪	IP	∩	IP	∪

$f''(-1)=24\cdot(-1)(-5)=\oplus$

$f''\left(\frac{1}{3}\right)=24\cdot\frac{1}{3}\cdot(-1)=\ominus$

$f''(1)=24\cdot 1\cdot 1=\oplus$