

Diszkrét matematika II. gyakorlat

Gráfelmélet gyakorlat

Absztrakt algebra

Bogya Norbert

Bolyai Intézet

2015. május 8.

- 1 Megjegyzések
- 2 Gráfelmélet gyakorlat
- 3 Absztrakt algebra

- ▶ Az ötödik elektronikus teszt nyitva van. **NO CHROME.**
-

- ▶ **Szavazás.** Mikor legyen a dolgozat a következő alkalommal.
Május 15. 14⁰⁰-18⁰⁰
 - ▷ **Az óra elején.** (Ez lett a szavazás eredménye.)
 - ▷ Az óra végén.

- 1 Megjegyzések
- 2 Gráfelmélet gyakorlat
- 3 Absztrakt algebra

Feladat

Van-e olyan egyszerű gráf, melynek fokszámsorozata

(a) 1, 1, 2, 3, 3, 4;

(b) 3, 3, 4, 4, 5, 5?

Feladat

Van-e olyan egyszerű gráf, melynek fokszámsorozata

(a) 1, 1, 2, 3, 3, 4;

(b) 3, 3, 4, 4, 5, 5?

(a) igen

(b) igen

Feladat

Van-e olyan egyszerű gráf, melynek fokszámsorozata

(a) 1, 1, 2, 3, 3, 4;

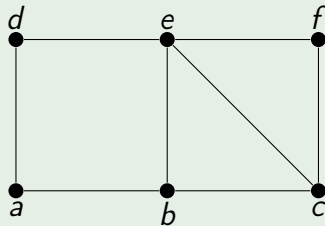
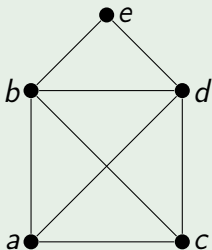
(b) 3, 3, 4, 4, 5, 5?

(a) igen

(b) igen

Feladat

Van-e a következő gráfokban Euler-vonal, zárt Euler-vonal, Hamilton út, Hamilton-kör?



Feladat

Egy erdő 5 fájában összesen 16 él van. Hány pontja van az erdőnek.

Feladat

Egy erdő 5 fájában összesen 16 él van. Hány pontja van az erdőnek.

Megoldás. 21.

Feladat

Egy erdő 5 fájában összesen 16 él van. Hány pontja van az erdőnek.

Megoldás. 21.

Feladat

Egy 20 pontú fának 18 darab 1 fokú pontja van.

- (a) Mennyi lehet a további két pont fokszáma?
- (b) Hány élt tartalmaz a leghosszabb útja?
- (c) Hány ilyen fa van, ha a csúcsokat nem különböztetjük meg?

Feladat

Egy erdő 5 fájában összesen 16 él van. Hány pontja van az erdőnek.

Megoldás. 21.

Feladat

Egy 20 pontú fának 18 darab 1 fokú pontja van.

- (a) Mennyi lehet a további két pont fokszáma?
- (b) Hány élt tartalmaz a leghosszabb útja?
- (c) Hány ilyen fa van, ha a csúcsokat nem különböztetjük meg?

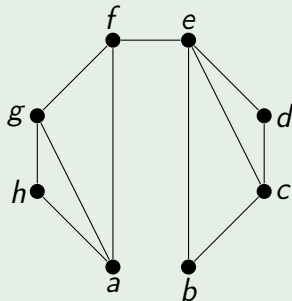
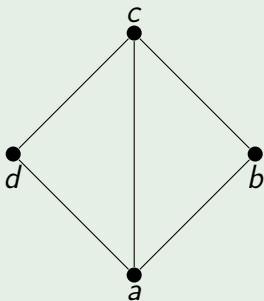
Megoldás.

- (a) 2 és 18 között bármi
- (b) 3
- (c) 9

Feladat

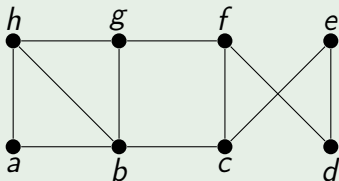
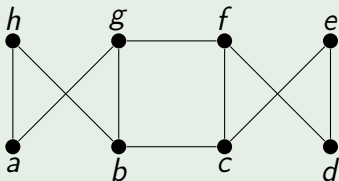
Adjunk meg az alábbi gráfokban

- (a) minimális lefogó ponthalmazt;
- (b) maximális párosítást;
- (c) $\nu(G)$ és $\tau(G)$ értékét.



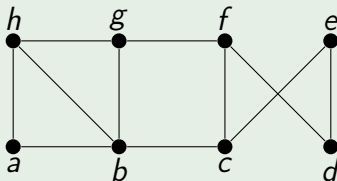
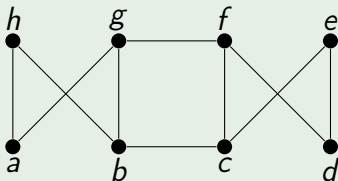
Feladat

Páros gráfok-e az alábbiak?



Feladat

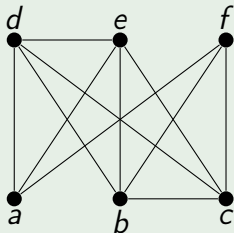
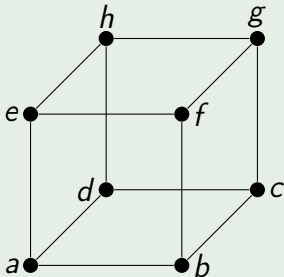
Páros gráfok-e az alábbiak?



Megoldás. Igen. Nem.

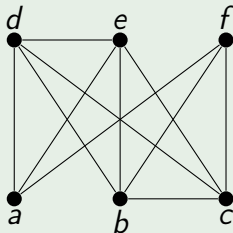
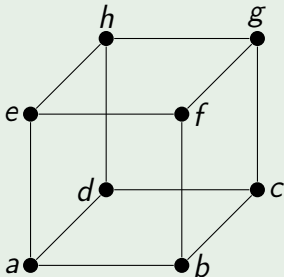
Feladat

Síkgráfok-e az alábbi gráfok?



Feladat

Síkgráfok-e az alábbi gráfok?



Megoldás. Igen. Nem.

- 1 Megjegyzések
- 2 Gráfelmélet gyakorlat
- 3 Absztrakt algebra

Művelet

Legyen A nemüres halmaz és $n \in \mathbb{N}$. Az A -n értelmezett n változós műveleten egy $A^n \rightarrow A$ leképezést értünk. Az n a művelet változószáma.

Algebra

Ha A nemüres halmaz, F pedig az A -n értelmezett műveletek halmaza, akkor az (A, F) párt algebrának nevezzük.

Példák.

Az algebraikat a műveleteik száma, változószáma és tulajdonságai alapján rendszerezük.

Grupoid

A grupoid olyan algebra, ahol 1 darab 2-változós művelet van értelmezve.

Grupoid

Az algebraikat a műveleteik száma, változószáma és tulajdonságai alapján rendszerezük.

Grupoid

A grupoid olyan algebra, ahol 1 darab 2-változós művelet van értelmezve.

Példák.

▶ $(\mathbb{R}; +)$

▶ $(\mathbb{Z}; \cdot)$

▶ $(\{i, h\}; \wedge)$

▶

$\circ$	0	1	2	3
0	3	1	0	2
1	2	1	1	1
2	0	1	2	3
3	2	1	3	3

Műveletek tulajdonságai

Legyen $(A; \circ)$ egy grupoid. $A \circ$ művelet

- ▶ **kommutatív**, ha $\forall a, b \in A$ esetén $a \circ b = b \circ a$;

Műveletek tulajdonságai

Legyen $(A; \circ)$ egy grupoid. A $\circ$ művelet

- ▶ **kommutatív**, ha $\forall a, b \in A$ esetén $a \circ b = b \circ a$;
- ▶ **asszociatív**, ha $\forall a, b, c \in A$ esetén $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$;

Műveletek tulajdonságai

Legyen $(A; \circ)$ egy grupoid. A $\circ$ művelet

- ▶ **kommutatív**, ha $\forall a, b \in A$ esetén $a \circ b = b \circ a$;
- ▶ **asszociatív**, ha $\forall a, b, c \in A$ esetén $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$;
- ▶ **kancellatív**, ha $\forall a, x, y \in A$ esetén

$$a \circ x = a \circ y \implies x = y$$

$$x \circ a = y \circ a \implies x = y.$$

Műveletek tulajdonságai

Legyen $(A; \circ)$ egy grupoid. A $\circ$ művelet

- ▶ **kommutatív**, ha $\forall a, b \in A$ esetén $a \circ b = b \circ a$;
- ▶ **asszociatív**, ha $\forall a, b, c \in A$ esetén $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$;
- ▶ **kancellatív**, ha $\forall a, x, y \in A$ esetén

$$a \circ x = a \circ y \implies x = y$$

$$x \circ a = y \circ a \implies x = y.$$

- ▶ Az $o \in A$ **zéruselem**, ha $\forall a \in A$ esetén $a \circ o = o \circ a = o$.

Műveletek tulajdonságai

Legyen $(A; \circ)$ egy grupoid. A $\circ$ művelet

- ▶ **kommutatív**, ha $\forall a, b \in A$ esetén $a \circ b = b \circ a$;
- ▶ **asszociatív**, ha $\forall a, b, c \in A$ esetén $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$;
- ▶ **kancellatív**, ha $\forall a, x, y \in A$ esetén

$$a \circ x = a \circ y \implies x = y$$

$$x \circ a = y \circ a \implies x = y.$$

- ▶ Az $o \in A$ **zéruselem**, ha $\forall a \in A$ esetén $a \circ o = o \circ a = o$.
- ▶ Az $e \in A$ **egységelem**, ha $\forall a \in A$ esetén $a \circ e = e \circ a = a$.

Műveletek tulajdonságai

Legyen $(A; \circ)$ egy grupoid. A $\circ$ művelet

- ▶ **kommutatív**, ha $\forall a, b \in A$ esetén $a \circ b = b \circ a$;
- ▶ **asszociatív**, ha $\forall a, b, c \in A$ esetén $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$;
- ▶ **kancellatív**, ha $\forall a, x, y \in A$ esetén

$$a \circ x = a \circ y \implies x = y$$

$$x \circ a = y \circ a \implies x = y.$$

- ▶ Az $o \in A$ **zéruselem**, ha $\forall a \in A$ esetén $a \circ o = o \circ a = o$.
- ▶ Az $e \in A$ **egységelem**, ha $\forall a \in A$ esetén $a \circ e = e \circ a = a$.
- ▶ Ha a grupoidban létezik e egységelem, akkor az a **inverze** b , ha $a \circ b = b \circ a = e$.

Műveletek tulajdonságai

Feladat

Milyen műveleti tulajdonságai vannak az alábbi grupoidok műveleteinek?

(a) $(\mathbb{R}; +)$

$\circ$	0	1	2	3
0	3	1	0	2
1	2	1	1	1
2	0	1	2	3
3	2	1	3	3

(b)

Műveletek tulajdonságai

Feladat

Milyen műveleti tulajdonságai vannak az alábbi grupoidok műveleteinek?

(a) $(\mathbb{R}; +)$

$\circ$	0	1	2	3
0	3	1	0	2
(b) 1	2	1	1	1
2	0	1	2	3
3	2	1	3	3

Megoldás.

- (a) kommutatív, asszociatív, 0 egységelem, nincs zéruselem, a inverze $-a$, kancellatív
- (b) nem kommutatív, nem kancellatív, 2 egységelem, nincs zéruselem, 0 inverze 3 és 2 inverze 2

Tétel

Bármely grupoidban legfeljebb egy darab egységelem és legfeljebb egy darab zéruselem létezik.

Bizonyítás. Lásd a táblán.

Nevezetes algebrák

	asszociatív	egységelemes	inverz	kommutatív
grupoid				
félcsoport	✓			
monoid	✓	✓		
csoport	✓	✓	✓	
Abel-csoport	✓	✓	✓	✓

Nevezetes algebrák

	asszociatív	egységelemes	inverz	kommutatív
grupoid				
félcsoport	✓			
monoid	✓	✓		
csoport	✓	✓	✓	
Abel-csoport	✓	✓	✓	✓

Feladat

Készítsünk halmazábrát az alábbi struktúrákkal: $(\mathbb{N}; +)$, $(\mathbb{N}_0; +)$, $(\mathbb{Z}; +)$, $(\mathbb{Z}_3; +)$, $(\mathbb{Z}_3; \cdot)$, $(\mathbb{Z}; \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}; +)$, $(\mathbb{R}; \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \cdot)$, $(\overline{\mathbb{M}}_2; \cdot)$.

Feladat

Tekintsük az $(\mathbb{R}, \Delta)$ algebrai struktúrát. A Δ műveletet a következőképpen definiáljuk:

$$a \Delta b = 12 - 3a - 3b + ab$$

Vizsgáljuk az algebrát asszociativitás, kommutativitás szempontjából. Van-e benne egységelem, zéruselem? Milyen elemeknek van inverze?

Feladat

Tekintsük az $(\mathbb{R}, \Delta)$ algebrai struktúrát. A Δ műveletet a következőképpen definiáljuk:

$$a \Delta b = 12 - 3a - 3b + ab$$

Vizsgáljuk az algebrát asszociativitás, kommutativitás szempontjából. Van-e benne egységelem, zéruselem? Milyen elemeknek van inverze?

Megoldás. $(\mathbb{R}, \Delta)$ zéruselemes kommutatív monoid

Feladat

Tekintsük az $(\mathbb{R}, \Delta)$ algebrai struktúrát. A Δ műveletet a következőképpen definiáljuk:

$$a \Delta b = 12 - 3a - 3b + ab$$

Vizsgáljuk az algebrát asszociativitás, kommutativitás szempontjából. Van-e benne egységelem, zéruselem? Milyen elemeknek van inverze?

Megoldás. $(\mathbb{R}, \Delta)$ zéruselemes kommutatív monoid

Tétel

Monoidban minden elemnek legfeljebb egy inverze van.

Bizonyítás. Lásd a táblán.

Definíció

Legyen $*$ és $\circ$ két tetszőleges kétváltozós művelet az A nemüres halmazon. A $\circ$ művelet disztributív a $*$ műveletre, ha $\forall a, b, c \in A$ elemekre

$$(a * b) \circ c = (a \circ c) * (b \circ c)$$

$$c \circ (a * b) = (c \circ a) * (c \circ b)$$

Definíció

Legyen $*$ és $\circ$ két tetszőleges kétváltozós művelet az A nemüres halmazon. A $\circ$ művelet disztributív a $*$ műveletre, ha $\forall a, b, c \in A$ elemekre

$$(a * b) \circ c = (a \circ c) * (b \circ c)$$

$$c \circ (a * b) = (c \circ a) * (c \circ b)$$

Példák.

Definíció

Legyen $*$ és $\circ$ két tetszőleges kétváltozós művelet az A nemüres halmazon. A $\circ$ művelet disztributív a $*$ műveletre, ha $\forall a, b, c \in A$ elemekre

$$(a * b) \circ c = (a \circ c) * (b \circ c)$$

$$c \circ (a * b) = (c \circ a) * (c \circ b)$$

Példák. A $\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{N}$ halmazokon a $\cdot$ disztributív az $+$ -ra nézve. Az $\{i, h\}$ logikai értékek halmazán az $\wedge$ disztributív a $\vee$ műveletre.

Gyűrű

Az $(A; +, \cdot)$ algebra gyűrű, ha

- 1 $(A; +)$ Abel-csoport,
- 2 $(A; \cdot)$ félcsoport,
- 3 $\cdot$ disztributív $+$ -ra.

Gyűrű

Az $(A; +, \cdot)$ algebra gyűrű, ha

- 1 $(A; +)$ Abel-csoport,
- 2 $(A; \cdot)$ félcsoport,
- 3 $\cdot$ disztributív $+$ -ra.

Példák

- ▶ $(\mathbb{Z}_n; +, \cdot)$
- ▶ $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$
- ▶ $(\overline{\mathbb{M}}_n; +, \cdot)$

Gyűrű

Az $(A; +, \cdot)$ algebra gyűrű, ha

- 1 $(A; +)$ Abel-csoport,
- 2 $(A; \cdot)$ félcsoport,
- 3 $\cdot$ disztributív $+$ -ra.

Test

Az $(A; +, \cdot)$ algebra gyűrű, ha

- 1 $(A; +)$ Abel-csoport,
- 2 $(A \setminus \{0\}; \cdot)$ Abel-csoport,
- 3 $\cdot$ disztributív $+$ -ra.

Példák

- ▶ $(\mathbb{Z}_n; +, \cdot)$
- ▶ $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$
- ▶ $(\overline{\mathbb{M}}_n; +, \cdot)$

Gyűrű

Az $(A; +, \cdot)$ algebra gyűrű, ha

- 1 $(A; +)$ Abel-csoport,
- 2 $(A; \cdot)$ félcsoport,
- 3 $\cdot$ disztributív $+$ -ra.

Példák

- ▶ $(\mathbb{Z}_n; +, \cdot)$
- ▶ $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$
- ▶ $(\overline{\mathbb{M}}_n; +, \cdot)$

Test

Az $(A; +, \cdot)$ algebra gyűrű, ha

- 1 $(A; +)$ Abel-csoport,
- 2 $(A \setminus \{0\}; \cdot)$ Abel-csoport,
- 3 $\cdot$ disztributív $+$ -ra.

Példák

- ▶ $(\mathbb{Z}_p; +, \cdot)$
- ▶ $(\mathbb{Q}; +, \cdot)$
- ▶ $(\mathbb{R}; +, \cdot)$
- ▶ $(\mathbb{C}; +, \cdot)$

Feladat

Számoljunk a $\mathbb{Z}_{19}$ testben.

(a) $\overline{12} + \overline{16}$; (b) $\overline{3} \cdot \overline{12}$; (c) $\overline{\frac{3}{5}}$; (d) $\overline{9}^{38}$

Feladat

Számoljunk a $\mathbb{Z}_{19}$ testben.

- (a) $\overline{12} + \overline{16}$; (b) $\overline{3} \cdot \overline{12}$; (c) $\overline{\frac{3}{5}}$; (d) $\overline{9}^{38}$

Megoldás.

- (a) $\overline{9}$; (b) $\overline{17}$; (c) $\overline{12}$; (d) $\overline{5}$

Feladat

Számoljunk a $\mathbb{Z}_{19}$ testben.

- (a) $\overline{12} + \overline{16}$; (b) $\overline{3} \cdot \overline{12}$; (c) $\overline{\frac{3}{5}}$; (d) $\overline{9}^{38}$

Megoldás.

- (a) $\overline{9}$; (b) $\overline{17}$; (c) $\overline{12}$; (d) $\overline{5}$

Tétel

$(\mathbb{Z}_n; +, \cdot)$ test $\iff n$ prím