

Diszkrét matematika I. gyakorlat

2. ZH

2014. november 28.

A csoport

1. Feladat. (5 pont) Határozza meg a

$$z_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

komplex szám trigonometrikus alakját, majd adja meg a

$$\frac{z_1}{z_2} \quad \text{és} \quad z_1 \cdot z_2$$

komplex számok trigonometrikus alakját, ha $z_2 = 3(\cos \frac{\pi}{5} + i \cdot \sin \frac{\pi}{5})$.

Megoldás.

- $z_1 = 2 \cdot (\cos \frac{3\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{3\pi}{4})$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3} \cdot (\cos \frac{11\pi}{20} + i \cdot \sin \frac{11\pi}{20})$
- $z_1 \cdot z_2 = 6 \cdot (\cos \frac{19\pi}{20} + i \cdot \sin \frac{19\pi}{20})$

2. Feladat. (4 pont) Lineárisan független vektorrendszer-e a v_1, v_2, v_3, v_4 vektorrendszer, ha

$$v_1 = (1, 2, -1, -3), v_2 = (0, 2, 2, 1), v_3 = (-1, -1, 2, 2), v_4 = (2, 3, -3, -3).$$

Válaszát indokolja.

Megoldás.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A mátrixban három „nemnulla sor” maradt, így a vektorrendszer rangja 3. Mivel négy vektorból indultunk ki, de a rang csak három, ezért lineárisan függő a vektorrendszer.

3. Feladat. (5 pont) Határozza meg az $\underline{u} = (2, 2, -1)$ és $\underline{v} = (3, -1, 1)$ vektorok vektoriális szorzatát. Továbbá adjon meg egy olyan vektort, mely merőleges a $\underline{v}$ vektorra, de egyik koordinátája sem nulla.

Megoldás.

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \underline{i} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \underline{j} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \underline{k} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1\underline{i} - 5\underline{j} - 8\underline{k} = (1, -5, -8)$$

4. Feladat. (4 pont) Formalizálja az alábbi állítást a megadott predikátumkalkulusbeli elemek segítségével, majd adja meg a kapott formula tagadását olyan alakban, melyben csak predikátumjel előtt állhat negációjel.

„Van olyan informatikus, aki szeret játszani, de nem tud programozni.”

Az individuum-halmaz legyen az emberek halmaza, a felhasználható predikátumok: $I(x)$: „ x informatikus”, $J(x)$: „ x szeret játszani”, $P(x)$: „ x tud programozni”.

Megoldás.

$$(\exists x)(I(x) \wedge (J(x) \wedge \neg P(x)))$$

Tagadás:

$$(\forall x)(\neg I(x) \vee (\neg J(x) \vee P(x)))$$

5. Feladat. (5 pont) Határozza meg az

$$(A \leftrightarrow B) \wedge ((\neg B) \rightarrow C)$$

ítéletkalkulusbeli formula teljes diszjunktív normálformáját.

Megoldás.

$(A \leftrightarrow B) \wedge ((\neg B) \rightarrow C)$							
i	i	i	i	h	i	i	
i	i	i	i	h	i	h	
i	h	h	h	i	i	i	
i	h	h	h	i	h	h	
h	h	i	h	h	i	i	
h	h	i	h	h	i	h	
h	i	h	i	i	i	i	
h	i	h	h	i	h	h	

$$(A \leftrightarrow B) \wedge ((\neg B) \rightarrow C) \equiv (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C)$$

Bónusz feladat. (+3 pont. A bónusz feladatot csak annak értékelem, akinek legalább 19 pontja van az öt előző feladatból összesen.) Formalizálja az alábbi állítást megfelelően megválasztva a predikátumkalkulusbeli elemeket.

„Nem minden szarka farka tarka, csak a tarka tollú szarka farka tarka.”

Megoldás. A feladat részletes megoldása megtalálható az előadásjegyzetben.

Név:

EHA-kód:

1.	2.	3.	4.	5.	Σ

Diszkrét matematika I. gyakorlat

2. ZH

2014. november 28.

B csoport

1. Feladat. (5 pont)

- Határozza meg a $z = 2 - 2i$ komplex szám trigonometrikus alakját.
- Ossza el maradékosan a $3x^4 - 2x^3 + x - 2$ polinomot az $x^2 + 1$ polinommal. Jelölje, hogy mi a hányados, mi a maradék.

Megoldás.

- $z = 2\sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{7\pi}{4}\right)$
- $3x^4 - 2x^3 + x - 2 = (x^2 + 1)(3x^2 - 2x - 3) + (3x + 1)$

2. Feladat. (5 pont) Határozza meg az

$$(A \rightarrow B) \wedge ((\neg B) \leftrightarrow C)$$

ítéletkalkulusbeli formula teljes diszjunktív normálformáját.

Megoldás.

$(A \rightarrow B)$	$\wedge$	$((\neg B) \leftrightarrow C)$
$i \quad i \quad i$	h	$h \quad i$
$i \quad i \quad i$	i	$i \quad h$
$i \quad h \quad h$	h	$i \quad i$
$i \quad h \quad h$	h	$i \quad h$
$h \quad i \quad i$	h	$h \quad i$
$h \quad i \quad i$	i	$i \quad h$
$h \quad i \quad h$	i	$i \quad i$
$h \quad i \quad h$	h	$h \quad h$

$$(A \rightarrow B) \wedge ((\neg B) \leftrightarrow C) \equiv (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C)$$

3. Feladat. (5 pont) Határozza meg az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ helyvektorok által meghatározott paralelepipedon térfogatát. Továbbá adjon meg egy olyan 2×2 -es mátrixot, melynek nincs valós sajátértéke.

$$\underline{a} = (1, 2, -1), \quad \underline{b} = (-1, 3, 4), \quad \underline{c} = (2, 0, -1)$$

$$\underline{a} = (1, -3, 1), \quad \underline{b} = (2, 0, -2), \quad \underline{c} = (-1, 3, 2)$$

Megoldás.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 7 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = -(-3 - 14) = 17$$

A paralelepipedon térfogata 17.

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot (0 - (-6)) = 18$$

A paralelepipedon térfogata 18.

4. Feladat. (4 pont) Formalizálja az alábbi állítást a megadott predikátumkalkulusbeli elemek segítségével, majd adja meg a kapott formula tagadását olyan alakban, melyben csak predikátumjel előtt állhat negációjel.

„Minden informatikus szeret játszani és tud programozni.”

Az individuum-halmaz legyen az emberek halmaza, a felhasználható predikátumok: $I(x)$: „ x informatikus”, $J(x)$: „ x szeret játszani”, $P(x)$: „ x tud programozni”.

Megoldás.

$$(\forall x)(I(x) \rightarrow (J(x) \wedge P(x)))$$

Tagadás:

$$(\exists x)(I(x) \wedge (\neg J(x) \vee \neg P(x)))$$

5. Feladat. (4 pont) Generátorrendszert alkot-e a v_1, v_2, v_3, v_4 vektorrendszer $\mathbb{R}^3$ -ban, ha

$$v_1 = (1, 1, -1), v_2 = (-1, 1, 2), v_3 = (1, -1, -3), v_4 = (-2, 2, 7).$$

Válaszát indokolja.

Megoldás.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ -2 & 2 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A vektorrendszer rangja 3, és mivel ez megegyezik a vektortér dimenziójával, ezért a vektorrendszer generátorrendszert alkot.

Bónusz feladat. (+3 pont. A bónusz feladatot csak annak értékelem, akinek legalább 19 pontja van az öt előző feladatból összesen.) Formalizálja az alábbi állítást megfelelően megválasztva a predikátumkalkulusbeli elemeket.

„Nem minden szarka farka tarka, csak a tarka tollú szarka farka tarka.”

Megoldás. A feladat részletes megoldása megtalálható az előadásjegyzetben.

Név:

EHA-kód:

1.	2.	3.	4.	5.	Σ

Diszkrét matematika I. gyakorlat

2. ZH

2014. november 28.

C csoport

1. Feladat. (5 pont) Tautológia-e az

$$(A \leftrightarrow B) \rightarrow (B \vee C)$$

ítéletkalkulusbeli formula? Hány diszjunkciójel ($\vee$) és hány konjunkciójel ($\wedge$) van a formula teljes diszjunktív normálformájában? Válaszeit indokolja!

Megoldás.

$(A \leftrightarrow B)$			$\rightarrow$	$(B \vee C)$		
i	i	i	i	i	i	i
i	i	i	i	i	i	h
i	h	h	i	h	i	i
i	h	h	i	h	h	h
h	h	i	i	i	i	i
h	h	i	i	i	i	h
h	i	h	i	h	i	i
h	i	h	h	h	h	h

Mivel van olyan kiértékelése a formulának, melyre hamis eredményt ad, ezért nem tautológia. A teljes diszjunktív normálformája hat darab diszjunkciójelet tartalmaz, mert hét különböző kiértékelésre igaz a formula; illetve 14 darab konjunkciójelet tartalmaz, mert minden igaz kiértékeléshez tartozik kettő.

2. Feladat. (5 pont) Határozza meg az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix inverzét, sajátértékeit valamint a $(2A - I) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ mátrixot. (Az I a 2×2 -es egységmátrixot jelöli.)

Megoldás.

- $\det(A) = -1$
- $A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- $\begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 0 & -1-x \end{vmatrix} = (1-x)(-1-x)$
- A fenti polinomnak a gyökei a sajátértékek: $1, -1$.
- $2A - I = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

3. Feladat. (4 pont) Formalizálja az alábbi állítást a megadott predikátumkalkulusbeli elemek segítségével, majd adja meg a kapott formula tagadását olyan alakban, hogy csak predikátumjel előtt álljon negációjel.

„Minden magas kémény füstöl.”

Az individuum-halmaz legyen az építmények halmaza, a felhasználható predikátumok: $K(x)$: „ x kémény”, $F(x)$: „ x füstöl”, $M(x)$: „ x magas”.

Megoldás.

$$(\forall x)((M(x) \wedge K(x)) \rightarrow F(x))$$

Tagadás:

$$(\exists x)((M(x) \wedge K(x)) \wedge \neg F(x))$$

4. Feladat. (4 pont) Lineárisan független-e a v_1, v_2, v_3, v_4 vektorrendszer, ha

$$v_1 = (1, -1, 0, 2), v_2 = (2, -3, 1, 4), v_3 = (0, 1, 1, -1), v_4 = (-1, 0, -3, 1).$$

Válaszát indokolja.

Megoldás.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A vektorrendszer rangja 4, és mivel ez megegyezik a kiinduló vektorok darabszámával, ezért a vektorrendszer lineárisan független.

5. Feladat. (5 pont) Mely x értékekre teljesül, hogy

$$\begin{vmatrix} x & -3 & 2 \\ -2 & x & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1?$$

Mely y értékekre lesz merőleges az $(1, -1, 3)$ vektor a $(4, 1, y)$ vektorra?

Megoldás.

$$\begin{vmatrix} x & -3 & 2 \\ -2 & x & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & x \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & -3 \\ -2 & x \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4 + x) + (x^2 - 6) = x^2 + 2x - 14$$

Az $x^2 + 2x - 14 = 1$ egyenlet megoldásai: 3, -5.

Az $(1, -1, 3)$ vektor pontosan akkor lesz merőleges a $(4, 1, y)$ vektorra, ha a skalárszorzatuk nulla, azaz $4 - 1 + 3y = 0$, azaz $y = -1$.

Bónusz feladat. (+3 pont. A bónusz feladatot csak annak értékelem, akinek legalább 19 pontja van az öt előző feladatból összesen.) Formalizálja az alábbi állítást megfelelően megválasztva a predikátumkalkulusbeli elemeket.

„Nem minden szarka farka tarka, csak a tarka tollú szarka farka tarka.”

Megoldás. A feladat részletes megoldása megtalálható az előadásjegyzetben.
