

Diszkrét matematika I. gyakorlat

1. ZH

2014. október 7.

α csoport

1. Feladat. (5 pont) Legyenek adottak az $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ alaphalmazbeli

$$A = \{2, 3, 4, 6\}, \quad B = \{1, 4, 6\}, \quad C = \{1, 2, 5\}$$

halmazok. Adja meg az $(A \triangle \overline{B}) \setminus C$ halmaz hatványhalmazát.

Megoldás.

- $\overline{B} = \{2, 3, 5\}$
- $A \triangle \overline{B} = \{2, 3, 4, 6\} \triangle \{2, 3, 5\} = \{4, 5, 6\}$
- $(A \triangle \overline{B}) \setminus C = \{4, 6\}$
- $\mathcal{P}((A \triangle \overline{B}) \setminus C) = \{\emptyset, \{4\}, \{6\}, \{4, 6\}\}$

2. Feladat. (4 pont) Igazak-e az alábbi állítások? Válaszát mindegyik esetben indokolja.

- (a) A $\sigma = \{(a, b) : 3 \mid a - b\} \subseteq \mathbb{Z}^2$ reláció reflexív.
- (b) A $\tau = \{(x, y) : xy < 2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ reláció szimmetrikus.
- (c) A $\varrho = \{(x, y) : x + y = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ reláció antiszimmetrikus.
- (d) A $\mu = \{(a, b) : a^2 > b^2\} \subseteq \mathbb{Z}^2$ reláció dichotom.

Megoldás.

- (a) Igaz, mert $(a, a) \in \sigma$ pontosan akkor teljesül, ha $3 \mid a - a$, azaz $3 \mid 0$, ami minden a egész szám esetén igaz.
- (b) Igaz, abból, hogy $(x, y) \in \tau$, azaz $xy < 2$ a szorzás kommutativitása (felcserélhetősége) miatt automatikusan következik, hogy $yx < 2$, azaz $(y, x) \in \tau$.
- (c) Hamis, mert $(0, 1) \in \varrho$, $(1, 0) \in \varrho$ de $0 \neq 1$.
- (d) Hamis, mert $(5, 5) \notin \mu$ (a reláció nem reflexív).

3. Feladat. (5 pont) Határozza meg a

$$\frac{z_1 - \overline{z_2}}{z_3}, \quad i^{23}$$

komplex számokat, ha

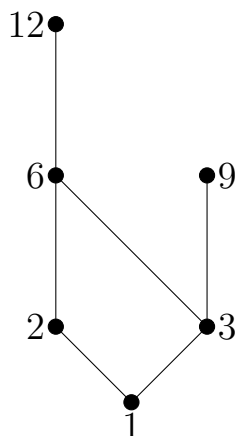
$$z_1 = 2 + 3i, \quad z_2 = 1 - i, \quad z_3 = 1 - 2i.$$

Megoldás.

- $\overline{z_2} = 1 + i$
- $z_1 - \overline{z_2} = (2 + 3i) - (1 + i) = 1 + 2i$
- $\frac{z_1 - \overline{z_2}}{z_3} = \frac{1+2i}{1-2i} \cdot \frac{1+2i}{1+2i} = \frac{1+4i-4}{1+4} = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$
- $i^{23} = (i^2)^{11} \cdot i = (-1)^{11} \cdot i = -i$

4. Feladat. (5 pont) Tekintsük az $A = \{1, 2, 3, 6, 9, 12\}$ halmazon az oszthatóság relációt, mint részbenrendezést. Határozza meg az $(A; |)$ részbenrendezett halmaz Hasse-diagramját valamint a maximális, minimális, legnagyobb és legkisebb elemeit.

Megoldás.



Legkisebb elem: 1.
 Legnagyobb elem: nincs.
 Maximális elemek: 12, 9.
 Minimális elem: 1.

5. Feladat. (4 pont) Igazak-e az alábbi állítások? Válaszát mindegyik esetben indokolja.

- (A) Az $\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y$ leképezés injektív.
- (B) A $\beta: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto |n + 4| + 1$ leképezés bijektív.
- (C) A $\mathbb{Z}^5 \cup \mathbb{Q}^4$ és $\mathbb{N} \times \mathbb{R}^2$ halmazok között létezik bijekció.

Megoldás.

- (A) Hamis, mert $(1, 2)\alpha = (3, 0)\alpha = 3$ de $(1, 2) \neq (3, 0)$.
 - (B) Hamis, mert ugyan injektív, de nem szürjektív. Az 1, 2, 3, 4, 5 számoknak nincs őse.
 - (C) Hamis, mert $|\mathbb{Z}^5 \cup \mathbb{Q}^4| = \max\{\aleph_0, \aleph_0\} = \aleph_0$, $|\mathbb{N} \times \mathbb{R}^2| = \max\{\aleph_0, c\} = c$ és $\aleph_0 \neq c$.
-
-

Diszkrét matematika I. gyakorlat

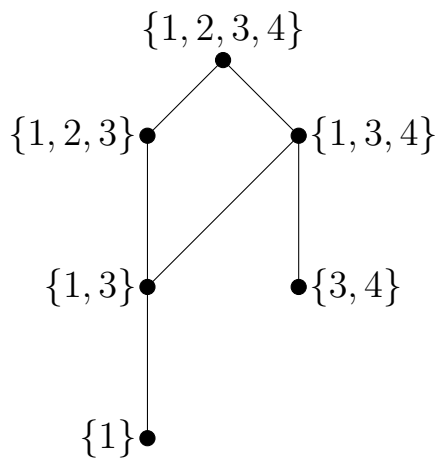
1. ZH

2014. október 7.

β csoport

1. Feladat. (5 pont) Tekintsük az $A = \{\{1\}, \{1, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$ halmazon a részhalmaz relációt, mint részbenrendezést. Határozza meg az $(A; \subseteq)$ részbenrendezett halmaz Hasse-diagramját valamint a maximális, minimális, legnagyobb és legkisebb elemeit.

Megoldás.



Legnagyobb elem: $\{1, 2, 3, 4\}$

Legkisebb elem: nincs.

Maximális elem: $\{1, 2, 3, 4\}$

Minimális elemek: $\{1\}, \{3, 4\}$

2. Feladat. (5 pont) Határozza meg a

$$\frac{z_1}{z_2 - z_3}, \quad i^{25}$$

komplex számokat, ha

$$z_1 = 1 - 4i, \quad z_2 = 3 + i, \quad z_3 = 1 - 2i.$$

Megoldás.

- $\overline{z_2} = 3 - i$
- $\overline{z_2} - z_3 = (3 - i) - (1 - 2i) = 2 + i$
- $\frac{z_1 - \overline{z_2}}{z_3} = \frac{1 - 4i}{2 + i} \cdot \frac{2 - i}{2 - i} = \frac{2 - 9i - 4}{4 + 1} = -\frac{2}{5} - \frac{9}{5}i$
- $i^{25} = (i^2)^{12} \cdot i = (-1)^{12} \cdot i = i$

3. Feladat. (4 pont) Igazak-e az alábbi állítások? Válaszát mindegyik esetben indokolja.

- (A) A $\mathbb{Q}^3 \cup \mathbb{N}^5$ és $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}$ halmazok számossága megegyezik.
(B) Az $\alpha: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto |n + 5| + 1$ leképezés bijektív.
(C) A $\beta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (a, b) \mapsto a - b$ leképezés injektív.

Megoldás.

- (A) Hamis, mert $|\mathbb{Q}^3 \cup \mathbb{N}^5| = \max\{\aleph_0, \aleph_0\} = \aleph_0$, $|\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}| = \max\{c, \aleph_0\} = c$ és $\aleph_0 \neq c$.
(B) Hamis, mert ugyan injektív, de nem szürjektív. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számoknak nincs őse.
(C) Hamis, mert $(2, 1)\beta = (3, 2)\beta = 1$ de $(2, 1) \neq (3, 2)$.

4. Feladat. (4 pont) Igazak-e az alábbi állítások? Válaszát mindegyik esetben indokolja.

- (a) A $\sigma = \{(x, y) : |x - y| < 2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ reláció szimmetrikus.
- (b) A $\tau = \{(a, b) : a^2 > b^2\} \subseteq \mathbb{Z}^2$ reláció reflexív.
- (c) A $\mu = \{(a, b) : 5 \mid a - b\} \subseteq \mathbb{Z}^2$ reláció dichotom.
- (d) A $\varrho = \{(x, y) : xy < 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ reláció antiszimmetrikus.

Megoldás.

- (a) Igaz, abból, hogy $(x, y) \in \sigma$, azaz $|x - y| < 2$ automatikusan következik, hogy $|y - x| < 2$, azaz $(y, x) \in \sigma$. Ugyanis $y - x = -(x - y)$, és így $|y - x| = |x - y|$.
- (b) Hamis, mert $(5, 5) \notin \tau$.
- (c) Hamis, mert $(2, 3) \notin \mu$ és $(3, 2) \notin \mu$.
- (d) Hamis, mert $(-1, 2) \in \varrho$, $(2, -1) \in \varrho$ de $-1 \neq 2$.

5. Feladat. (5 pont) Legyenek adottak az $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ alaphalmazbeli

$$A = \{2, 3, 4\}, \quad B = \{1, 4, 6\}, \quad C = \{1, 3, 4, 5\}$$

halmazok. Adja meg az $(\overline{A} \setminus B) \triangle C$ halmaz hatványhalmazát.

Megoldás.

- $\overline{A} = \{1, 5, 6\}$
 - $\overline{A} \setminus B = \{5\}$
 - $(\overline{A} \setminus B) \triangle C = \{5\} \triangle \{1, 3, 4, 5\} = \{1, 3, 4\}$
 - $\mathcal{P}((\overline{A} \setminus B) \triangle C) = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}\}$
-
-