

Név:

1.	2.	3.	4.	5.	Σ

EHA-kód:

Diszkrét matematika II. gyakorlat

1. ZH — 2014. március 19.

Uruk-hai csoport

1. Feladat. (4 pont) Oldja meg az $5^{122} \equiv x \pmod{72}$ kongruenciát? (Érdekesség: az 5^{122} szám 86 számjegyű.)

Megoldás. Mivel $72 = 3^2 \cdot 2^3$, ezért $\varphi(72) = (3^2 - 3) \cdot (2^3 - 2^2) = 6 \cdot 4 = 24$. Euler tételének értelmében $5^{24} \equiv 1 \pmod{72}$. Ebből következik, hogy

$$5^{122} = 5^{24 \cdot 5 + 2} = (5^{24})^5 \cdot 5^2 \equiv 1 \cdot 25 = 25 \pmod{72}.$$

2. Feladat. (1+2+2 pont) Egy fagyaltos 6 különböző ízű fagyaltot árul: pisztácia, vanília, tutti-frutti, karamell, rumos dió és kávé.

(a) Tölcsérben a gömböket egymás tetejére pakolják. Hányféle különböző 4 gömbös fagyaltot kérhetünk? (A gömbök elhelyezkedésénél számít a gömbök sorrendje.)

(b) Hányféleképpen kérhet egy 5 fős társaság 1-1 kétgömbös fagyaltot? (A rendelés sorrendje nem számít, csak az, hogy ki melyik fagyaltot kérte.)



(c) Elfogyott a pisztácia, és a többit annyira nem szeretjük. Ezért inkább dobozba kérünk 6 gömb fagyaltot, hogy majd otthon megegyük. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha két gömb vaníliát biztos venni akarunk? (A dobozban a gömbök sorrendje nem számít, csak az, hogy melyik milyen ízű.)

Megoldás. (a) A 6 különböző fajtából kell négyet kiválasztani, és ezeket sorba rendezni. Ismétléses variáció, a válasz 6^4 .

(b) Egy fő 6^2 -féle fagyaltot kérhet. Mindenki, egymástól függetlenül ugyanennyit kérhet. Így a válasz $6^2 \cdot 6^2 \cdot 6^2 \cdot 6^2 \cdot 6^2 = 6^{10}$.

(c) A feladat az, hogy a maradék 5-féle ízből válasszunk 4-et. Azonban egy ízből többet is választhatunk, tehát a válasz az ismétléses kombináció képletével adható meg: $\binom{5+4-1}{4}$.

3. Feladat. (5 pont) Adja meg a $64x + 28y = 12$ diofantoszi egyenlet általános megoldását. A megoldás során használja az euklideszi algoritmust, különben a megoldásért nem jár pont.

Megoldás. 1. lépés. Kiszámoljuk a 64 és 28 legnagyobb közös osztóját.

$$\begin{aligned} 64 &= 28 \cdot 2 + 8 \\ 28 &= 8 \cdot 3 + 4 \\ 8 &= 4 \cdot 2 + 0 \end{aligned}$$

A legnagyobb közös osztó 4, ami osztja a 12-t, tehát létezik megoldás.

2. lépés. Megkeressük az egyenlet egy partikuláris megoldását. Az euklideszi algoritmus eredményeit használva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 8 &= 64 - 28 \cdot 2 \\ 4 &= 28 - 8 \cdot 3 \end{aligned}$$

Azaz

$$4 = 28 - 8 \cdot 3 = 28 - (64 - 28 \cdot 2) \cdot 3 = 28 - 64 \cdot 3 + 28 \cdot 6 = 28 \cdot 7 - 64 \cdot 3.$$

A megfelelő átalakítások után a fenti egyenlet $64 \cdot (-3) + 28 \cdot 7 = 4$, azaz $64 \cdot (-9) + 28 \cdot 21 = 12$. Tehát $x_0 = -9$, $y_0 = 21$ egy partikuláris megoldás.

3. lépés. Megadjuk az egyenlet általános megoldását:

$$x = -9 + \frac{28}{4}t = -9 + 7t, \quad y = 21 - \frac{64}{4}t = 21 - 16t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

4. Feladat. (4 pont) Határozza meg a $(2x^3 + 3)^7$ kifejezésben az x^9 tag együtthatóját.

Megoldás. Felhasználjuk a binomiális tételt, mely szerint $(a + b)^n = \sum_{i=0}^n a^{n-i} b^i$. Megkeressük, melyik i határozza meg az x^9 -es tagot. Az $a = 2x^3$ és $b = 3$ helyettesítéssel az általános tagra azt az összefüggést kapjuk, hogy

$$(2x^3)^{7-i} \cdot 3^i = 2^{7-i} \cdot 3^i \cdot x^{21-3i}.$$

Így az x^{21-3i} -nek kell lennie az x^9 -es tagnak, azaz $21 - 3i = 9$, azaz $i = 4$. Így a keresett tag $\binom{7}{4} \cdot 2^3 \cdot 3^4 \cdot x^9$. A keresett együttható $\binom{7}{4} \cdot 2^3 \cdot 3^4$.

5. Feladat. (5 pont) Oldja meg a

$$\begin{aligned} 3x &\equiv 2 \pmod{5} \\ x &\equiv 3 \pmod{4} \end{aligned}$$

kongruenciarendszert.

Megoldás. *1. lépés.* Megoldjuk a kongruenciákat külön-külön. A másodikat már nem kell, mert az már a kellő alakban van megadva. Tehát csak az elsőt kell megoldani. Áttérünk diofantoszi egyenletre: $3x - 5y = 2$. Ennek az $x_0 = 4$, $y_0 = 2$ egy megoldása, így ebből felírható az általános megoldás. (Természetesen felhasználjuk azt, hogy $\text{lko}(3, 5) = 1$.) Megoldás: $x = 4 - 5t$, azaz $x \equiv 4 \pmod{5}$.

2. lépés. Megoldjuk a kongruenciarendszert diofantoszi egyenletrendszerként.

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv 4 \pmod{5} \\ x \equiv 3 \pmod{4} \end{array} \right\} \iff \begin{array}{l} x - 5y = 4 \\ x - 4z = 3 \end{array} \iff \begin{array}{l} 4 + 5y - 4z = 3 \\ 5y - 4z = -1 \end{array}$$

Az utolsó diofantoszi egyenletnek az $y_0 = -1$, $z_0 = -1$ megoldása, tehát az általános megoldás y -ra $y = -1 - 4t$, $t \in \mathbb{Z}$. Ebből következik, hogy

$$x = 4 + 5y = 4 + 5(-1 - 4t) = -1 - 20t.$$

Azaz $x \equiv -1 \pmod{20}$, azaz $x \equiv 19 \pmod{20}$.

Név:

1.	2.	3.	4.	5.	Σ

EHA-kód:

Diszkrét matematika II. gyakorlat

1. ZH — 2014. március 19.

Tünde csoport

1. Feladat. (4 pont) Mi a 7^{803} szám utolsó három számjegye? (Érdekesség: maga a szám 485 számjegyű.)

Megoldás. Az utolsó három számjegyet megkaphatjuk az 1000-rel vett osztási maradék-ként, tehát a $7^{803} \equiv x \pmod{1000}$ kongruencia megoldását keressük. Mivel $1000 = 5^3 \cdot 2^3$, ezért $\varphi(1000) = (5^3 - 5^2) \cdot (2^3 - 2^2) = 100 \cdot 4 = 400$. Euler tételének értelmében $7^{400} \equiv 1 \pmod{1000}$. Ebből következik, hogy

$$7^{803} = 7^{400 \cdot 2 + 3} = (5^{400})^2 \cdot 7^3 \equiv 1 \cdot 7^3 = 343 \pmod{1000}.$$

2. Feladat. (4 pont) Hányféleképpen tudjuk sorba rendezni a „KITARTÁS” szó betűit úgy, hogy két magánhangzó ne kerüljön egymás mellé?

Megoldás. A három magánhangzó között legalább egy-egy mássalhangzónak állnia kell: ... I X A X Á ... A két X két mássalhangzót jelöl, így még el kell helyezni 5-2 mássalhangzót a sorozatba. Ezeket 4 helyre tehetem be: A két X-szel jelölt helyre, illetve a sorozat elejére és végére. Tehát mindegyik betűhöz ki kell választani egy helyet, ez $\binom{4+3-1}{3}$ -féleképpen tehető meg. Továbbá a három magánhangzó $3!$ -féleképpen állhat sorban, a mássalhangzók pedig $\frac{5!}{2!}$ -féleképpen. Tehát a válasz $\binom{6}{3} \cdot 3! \cdot \frac{5!}{2!}$.

3. Feladat. (5 pont) Adja meg a $15x + 51y = 9$ diofantoszi egyenlet általános megoldását. A megoldás során használja az euklideszi algoritmust, különben a megoldásért nem jár pont.

Megoldás. 1. lépés. Kiszámoljuk a 15 és 51 legnagyobb közös osztóját.

$$51 = 15 \cdot 4 + 6$$

$$15 = 6 \cdot 2 + 3$$

$$6 = 3 \cdot 2 + 0$$

A legnagyobb közös osztó 3, ami osztja a 9-et, tehát létezik megoldás.

2. lépés. Megkeressük az egyenlet egy partikuláris megoldását. Az euklideszi algoritmus eredményeit használva kapjuk, hogy

$$6 = 51 - 15 \cdot 4$$

$$3 = 15 - 6 \cdot 2$$

Azaz

$$3 = 15 - 6 \cdot 2 = 15 - (51 - 15 \cdot 4) \cdot 2 = 15 - 51 \cdot 2 + 15 \cdot 8 = 15 \cdot 7 - 51 \cdot 2.$$

A megfelelő átalakítások után a fenti egyenlet $15 \cdot 7 + 51 \cdot (-2) = 3$, azaz $15 \cdot 21 + 51 \cdot (-6) = 9$. Tehát $x_0 = 21$, $y_0 = -6$ egy partikuláris megoldás.

3. lépés. Megadjuk az egyenlet általános megoldását:

$$x = 21 + \frac{51}{3}t = 21 + 17t, \quad y = -6 - \frac{15}{3}t = -6 - 5t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

4. Feladat. (5 pont) Határozza meg a $(x^2 + \frac{3}{x})^9$ kifejezésben az x^3 tag együtthatóját.

Megoldás. Felhasználjuk a binomiális tételt, mely szerint $(a+b)^n = \sum_{i=0}^n a^{n-i}b^i$. Megkeressük, melyik i határozza meg az x^3 -es tagot. Az $a = x^2$ és $b = 3x^{-1}$ helyettesítéssel az általános tagra azt az összefüggést kapjuk, hogy

$$(x^2)^{9-i} \cdot (3x^{-1})^i = 3^i \cdot x^{-i} \cdot x^{18-2i} = 3^i \cdot x^{18-3i}.$$

Így az x^{18-3i} -nek kell lennie az x^3 -os tagnak, azaz $18 - 3i = 3$, azaz $i = 5$. Így a keresett tag $\binom{9}{5} \cdot 3^5 \cdot x^3$. A keresett együttható $\binom{9}{5} \cdot 3^5$.

5. Feladat. (5 pont) Oldja meg az

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod{5} \\ 3x &\equiv 1 \pmod{4} \end{aligned}$$

kongruenciarendszert.

Megoldás. 1. lépés. Megoldjuk a kongruenciákat külön-külön. Az első már nem kell, mert az már a kellő alakban van megadva. Tehát csak a másodikat kell megoldani. Áttérünk diofantoszi egyenletre: $3x - 4y = 1$. Ennek az $x_0 = 3$, $y_0 = 2$ egy megoldása, így ebből felírható az általános megoldás. (Természetesen felhasználjuk azt, hogy $\text{lko}(3,4) = 1$.) Megoldás: $x = 3 - 4t$, azaz $x \equiv 3 \pmod{4}$.

2. lépés. Megoldjuk a kongruenciarendszert diofantoszi egyenletrendszerként.

$$\left. \begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod{5} \\ x &\equiv 3 \pmod{4} \end{aligned} \right\} \iff \begin{aligned} x - 5y &= 2 \\ x - 4z &= 3 \end{aligned} \iff \begin{aligned} 2 + 5y - 4z &= 3 \\ 5y - 4z &= 1 \end{aligned}$$

Az utolsó diofantoszi egyenletnek az $y_0 = 1$, $z_0 = 1$ megoldása, tehát az általános megoldás y -ra $y = 1 - 4t$, $t \in \mathbb{Z}$. Ebből következik, hogy

$$x = 2 + 5y = 2 + 5(1 - 4t) = 7 - 20t.$$

Azaz $x \equiv 7 \pmod{20}$.
